

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Г.Є. ФІЛАТОВА

**ПРОЕКТУВАННЯ ЦИФРОВИХ
ФІЛЬТРІВ**

*Навчальний посібник
за курсом «Обробка сигналів і зображень»*

Харків
ХНАДУ
2017

УДК 004.032.2
ББК 32.98+32.973.2
Ф 51

*Затверджено редакційно-видавничою радою університету,
протокол № 1 від 07.06.2013 р.*

Рецензенти: А.І. Бих, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
завідувач каф. біомедичних електронних пристроїв та систем
Харківського національного університету радіоелектроніки;
Г.А. Кучук, д-р техн. наук, с.н.с., провідний науковий
співробітник науково-дослідного відділу
Харківського університету Повітряних сил ім. Івана Кожедуба

Автор
Філатова Г.Є., к.т.н., доцент

Філатова Г.Є.

Ф 51 Проектування цифрових фільтрів: навчальний посібник /
Г.Є. Філатова. – Х. : НТУ «ХПІ», 2017. – 120 с.
ISBN

У посібнику розглянуто питання призначення вагових функцій для цифрової фільтрації сигналів, методи проектування цифрових фільтрів. Теоретичні відомості та розрахунки супроводжуються прикладами реалізації синтезованих фільтрів за допомогою ППП MatLab. У додатках наведено розрахунково-графічне завдання та приклад його виконання.

Призначено для студентів спеціальності 7.091503 «Спеціалізовані комп'ютерні системи».

Іл. 50. Табл. 10. Бібліогр.: 10 назв.

УДК 004.032.2
ББК 32.98+32.973.2

ISBN

© Г.Є. Філатова, 2017

ВСТУП

Інтенсивний розвиток цифрових технологій сприяв їх впровадженню у такі технологічні галузі, як цифрове телебачення, біомедицина, цифровий мобільний зв'язок, цифровий аудіо- та відеозапис, телекомунікації та ін. Методи цифрової обробки сигналів є основою множини новітніх цифрових розробок та різноманітних застосувань доповнень, в тому числі в галузі обчислювальної техніки.

Навчальний посібник присвячений одному з найважливіших розділів цифрової обробки сигналів – проектуванню цифрових фільтрів. У цьому виданні приділяється увага теоретичним основам проектування цифрових фільтрів, а також їх програмній реалізації за допомогою пакета прикладних програм MatLab.

У цей час на кафедрі обчислювальної техніки й програмування НТУ «ХПІ» ведуться лекційні й практичні заняття, а також розрахунково-графічне завдання за курсом «Обробка сигналів і зображень». Структура й зміст посібника відповідає робочій програмі курсу і складається із чотирьох частин і двох додатків. Усі розділи містять контрольні запитання, які можуть використовуватися як при самопідготовці, так і при контролі знань; приклади програм на мові MatLab, а також приклади проектування за допомогою пакетів FDATool та Simulink.

У першому розділі розглянуто теоретичні основи спектрального аналізу цифрових сигналів на обмеженому інтервалі часу, призначення вагових функцій, їх властивості та порівняльний аналіз.

У другому розділі наведено етапи проектування цифрових фільтрів, проектування СІХ-фільтрів методом зважування та програмна реалізація методу на мові MatLab, а також приклади проектування частотно-вибіркових СІХ-фільтрів за заданою специфікацією вимог.

У третьому розділі розглянуто основні характеристики НІХ-фільтрів, методи дискретизації аналогових фільтрів-прототипів, а також приклади проектування частотно-вибіркових НІХ-фільтрів за заданою специфікацією вимог.

У четвертому розділі наведено характеристики пакетів FDATool й Simulink, експорт та імпорт опису фільтра, моделювання процесу фільтрації за допомогою спроектованого фільтра.

У додатку А визначено загальну мету і план виконання РГЗ та індивідуальні завдання за варіантами, а у додатку Б розглянуто приклад виконання та оформлення розрахунково-графічного завдання за варіантом.

1. ВАГОВІ ФУНКЦІЇ

1.1. Призначення вагових функцій

У загальному випадку точне подання сигналів потребує виконання операцій спектрального аналізу та синтезу для нескінченної кількості гармонік періодичного сигналу або урахування спектральної щільності потужності в усьому (нескінченному ліворуч і праворуч) діапазоні частот. Це робить, як правило, реальний числовий спектральний аналіз і синтез практично неможливим. Між тим, більшість реальних сигналів має обмежений спектр, і тому можливий спектральний аналіз в обмеженому частотному діапазоні.

Для обмеження частотного спектра або часової ділянки задання сигналів застосовуються частотні або часові *вікна*. Вікна можуть бути різного типу й характеризуються графічними залежностями своїх коефіцієнтів і різними специфічними параметрами. Далі розглянемо вікна як залежність коефіцієнта передачі вікна від номера відліку. Використання вікон є в основі *короткочасного* або *віконного перетворення Фур'є*. Крім того, вагові вікна використовуються при проектуванні нерекурсивних фільтрів методом зважування.

Обмеження послідовності скінченною кількістю значень рівно-сильне множенню початкової нескінченної послідовності на так зване *прямокутне вікно*. Тоді перетворення Фур'є скінченної послідовності дорівнює згортці перетворень Фур'є нескінченної послідовності й прямокутного вікна. Оскільки спектр прямокутного вікна має пульсуючий характер, то відбувається так зване «розтікання» спектра сигналу за рахунок того, що відбувається втрата енергії спектральних піків у бічні пелюстки. Для зменшення зазначеного явища застосовують вагові вікна, відмінні від прямокутного, які дозволяють знизити рівень бічних пелюсток порівняно з випадком прямокутного вікна. Однак це призводить до розширення основної пелюстки, тому повинен існувати компроміс між шириною основної пелюстки та рівнем бічних пелюсток. Для порівняння амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) різних вагових вікон шкала амплітуд часто градується в децибелах. Розглянемо докладніше такі одиниці вимірювання, як бели і децибели.

1.2. Вимірювання фізичних величин у белах і децибелах

Коли потрібно порівняти які-небудь величини, це можна зробити по-різному. Можна, наприклад, поділивши ці величини одну на одну, сказати, що P_1 більше ніж P_2 в 3 рази, або P_1 менше ніж P_2 в 28 разів. Якщо нам знадобиться далі вести якісь розрахунки, ми будемо користуватися абстрактними числами 3, або 28, або $1/28$ (іноді для уточнення додаючи слово «раз»).

У ряді випадків для розрахунків або для більшої наочності порівняння виявляється зручніше логарифмувати відношення величин і оперувати далі з числом $\log_a(P_1 / P_2)$. Відомо, що застосування логарифмів спрощує математичні розрахунки, зокрема, дозволяє замість множення й ділення користуватися додаванням і відніманням. При великому діапазоні змін якої-небудь величини логарифмічний масштаб дозволяє краще розглядіти на одному і тому ж графіку і малі, і великі її відносні зміни. У системі СІ як відносна логарифмічна одиниця відношення потужностей P_1 і P_2 прийнятий десятиковий логарифм $\lg(P_1 / P_2)$. Ця одиниця називається *бел* (Б). На практиці цією досить великою одиницею виявилось не дуже зручно оперувати, тому використовують одиницю в десять разів меншу – *децибел*. Співвідношення двох рівнів потужності P_1 й P_2 у децибелах (дБ, або db) виражають за такою формулою:

$$D = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2}. \quad (1.1)$$

Нагадаємо, що миттєва потужність дійсного дискретного сигналу визначається за виразом $P[n] = x^2[n]$, а величина $S_x[k] = X^2[k]$ називається енергетичним спектром. Тобто енергетичні характеристики являють собою квадрати деяких амплітудних значень.

Іноді досить складно визначити, що вважати амплітудною величиною, а що енергетичною. Напруга, струм, імпеданс, напруженості електричного або магнітного полів і розмахи будь-яких хвильових процесів вважаються амплітудними величинами. Коли відбувається вимір у децибелах, то обчислюється логарифм відношення квадратів

цих величин. Наприклад, для порівняння двох значень струму маємо:

$$D = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} = 10 \cdot \lg \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^2 = 20 \cdot \lg \frac{I_1}{I_2}. (1.2)$$

Енергія, потужність та інтенсивність є енергетичними величинами, тому обчислення виконується за виразом (1.1).

Таким чином, для порівняння амплітудних спектрів у децибелах необхідно користуватися виразом (1.2). У табл. 1.1 наведено деякі часто використовувані значення в децибелах і відношення амплітуд і потужностей.

Таблиця 1.1

Деякі значення відношень амплітудних
і енергетичних показників

Відношення амплітуд	Відношення потужностей	Значення в дБ
0,7	0,5	−3
0,5	0,25	−6
0,3	0,1	−10
0,1	0,01	−20
0,05	0,003	−25
0,01	10^{-4}	−40
0,001	10^{-6}	−60

1.3. Спектральний аналіз на обмеженому інтервалі часу. Віконні функції

Розглянемо спочатку безперервний сигнал. Нехай є сигнал $s_0(t)$, нескінченний у часі. У найпростішому випадку можна задати цей сигнал як гармонічне коливання із частотою ω_0 . Перетворення Фур'є цього сигналу буде являти собою дельта-імпульс на частоті сигналу, тобто $S_0(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ [1].

На практиці не можна здійснити розрахування спектра шляхом числового інтегрування по всій осі часу (зрозуміло за винятком, коли можна одержати аналітичний вираз для спектра сигналу, як у

наведеному прикладі), тому зафіксуємо інтервал часу T , на якому будемо розраховувати спектр сигналу. Таким чином, сигнал $s(t)$ збігається з вихідним на інтервалі часу T , але поза інтервалом спостереження $s(t) = 0$. Математично $s(t)$ можна подати як добуток початкового нескінченного сигналу $s_0(t)$ й прямокутного імпульсу $w(t)$ тривалістю T , тобто $s(t) = s_0(t)w(t)$. Спектр сигналу $s(t)$ згідно із властивостями перетворення Фур'є буде рівний згортці (позначається $*$) спектрів початкового сигналу і спектра $W(\omega)$ прямокутного імпульсу $w(t)$:

$$S(\omega) = S_0(\omega) * W(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) * W(\omega) = W(\omega - \omega_0). \quad (1.3)$$

У виразі (1.3) було використано фільтруючу властивість дельта-функції. Гармонічні сигнали (початковий $s_0(t)$ і обмежений $s(t)$) та їх спектри показано на рис. 1.1.

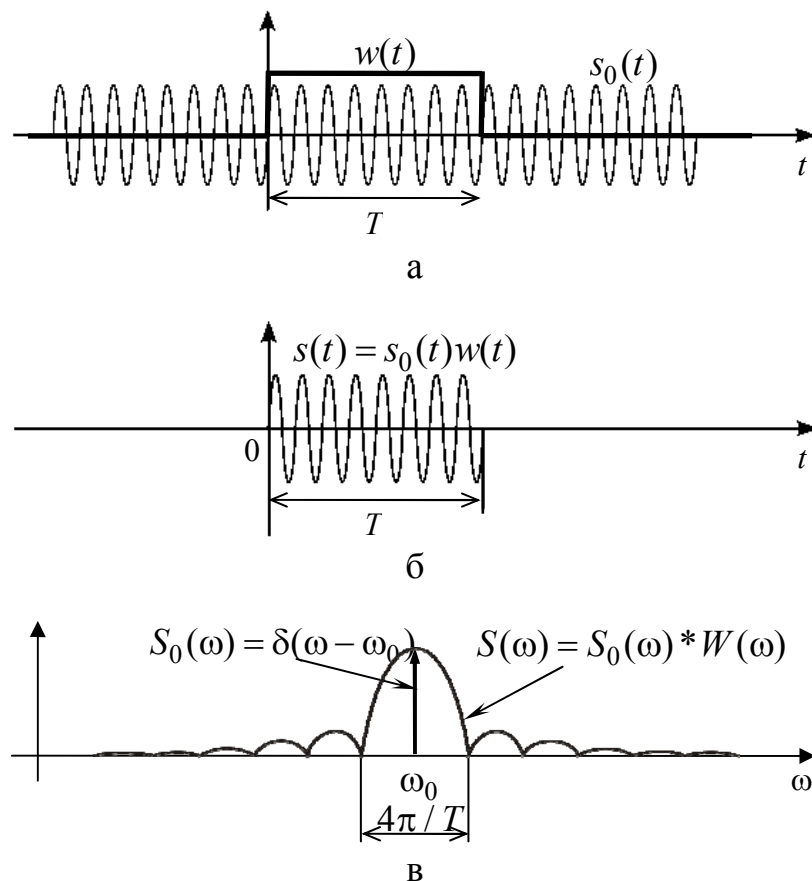


Рис. 1.1. Гармонічний сигнал та його спектр: а – необмежений сигнал $s_0(t)$ та прямокутний імпульс $w(t)$; б – обмежений у часі сигнал $s(t)$; в – спектри сигналів

Отже, замість дельта-імпульсу спектр $S(\omega)$ перетворився у функцію типу $\sin(x)/x$, що відповідає спектру прямокутного імпульсу функції $w(t)$, причому ширина пелюстки залежить від тривалості інтервалу аналізу, як це наочно показано на рис. 1.2.

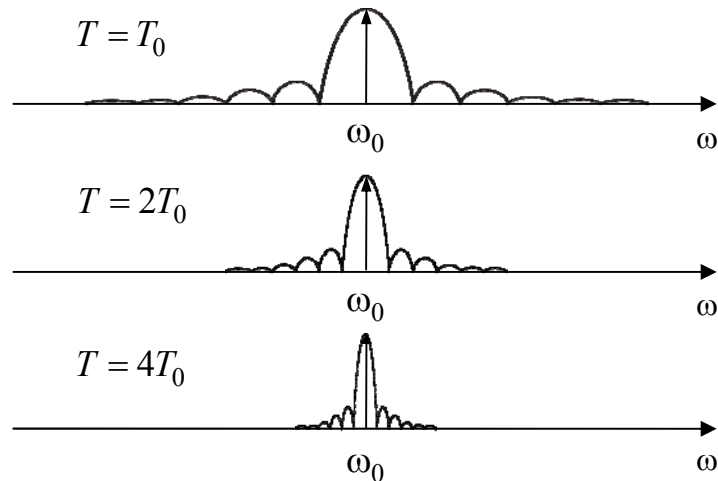


Рис. 1.2. Зміна спектра зі збільшенням інтервалу аналізу

Якщо збільшувати інтервал аналізу T нескінченно, то спектр буде звужуватися й прямувати до дельта-імпульсу. Прямокутний імпульс $w(t)$ назовемо віконною функцією.

Тепер розглянемо дискретний сигнал. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) відповідає N відлікам сигналу $s[n]$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) N відліків спектра, узятих на одному періоді повторення спектра: $S[k]$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$). Відліки сигналу взяті через рівні проміжки часу $T_c = 2\pi / \omega_d$, де ω_d – частота дискретизації (рад/с). Таким чином, інтервал аналізу $T = NT_c = N2\pi / \omega_d$, тоді спектральні відліки беруться через інтервал $\Delta\omega = 2\pi / T$. Ширина головної пелюстки спектра $S(\omega)$ (рис. 1.1) дорівнює $\Delta\omega = 4\pi / T$, тоді можна розглянути два випадки.

Перший випадок – частота сигналу збігається з k -ю частотою спектра $\omega_0 = \omega(k)$ (верхній графік рис. 1.3). При дискретизації отримаємо тільки відлік на частоті $\omega_0 = \omega(k)$, при цьому за амплітудою відлік відповідає амплітуді сигналу, інші спектральні відліки будуть дорівнювати нулю, тому що моменти дискретизації спектра збігатимуться з нулями спектра віконної функції. Другий випадок, коли частота ω_0 не збігається з жодною частотою із сітки спектраль-

них відліків (нижній графік рис. 1.3). У цьому випадку спектр сигналу «розмивається». Замість одного спектрального відліку отримуємо множину відліків, тому що дискретизація проводиться вже не в нулях спектра функції вікна, і всі бічні пелюстки виявляються в спектрі. Крім того, амплітуда спектральних відліків також зменшується.

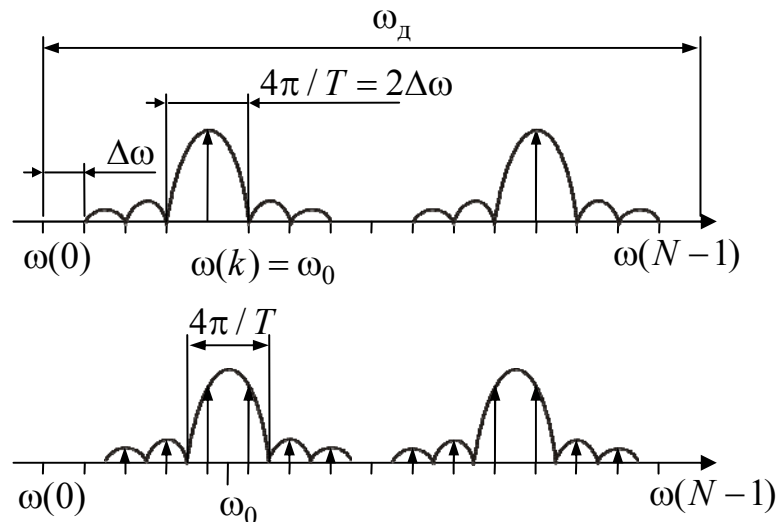


Рис. 1.3. ДПФ при збігу й розбіжності частоти сигналу і сітки частот спектра

Збіг частоти із сіткою спектральних відліків буде в тому випадку, якщо на інтервалі обробки укладається ціла кількість періодів сигналу. В іншому випадку спектр буде «розмазаний» [1].

Розмазування спектра – це негативний ефект, з яким необхідно боротися. Покажемо це на прикладі. Нехай є два гармонічні сигнали на частотах ω_0 і ω_1 , причому амплітуда сигналу на частоті ω_1 значно менша від амплітуди сигналу на частоті ω_0 . Обмеження інтервалу аналізу призведе до того, що спектри «розмажуться», і сигнал на частоті ω_1 буде не помітний під бічним пелюстком сигналу із частотою ω_0 , як це показано на рис. 1.4.

Очевидно, для того щоб виявити слабкий сигнал, необхідно усунути бічні пелюстки в спектрі, які виникають, коли ми обмежили сигнал прямокутним вікном. Виходить, щоб усунути ці пелюстки, необхідно усунути їх у спектрі віконної функції $w(t)$, тобто потрібно змінити віконну функцію, а саме зробити її більш гладкою, як це

показано на рис. 1.5. При гладкій віконній функції в спектрі не спостерігається бічних пелюсток (або їх рівень істотно знижується), однак є розширення основної пелюстки спектра порівняно з прямокутним вікном $\Omega > 4\pi / T$.

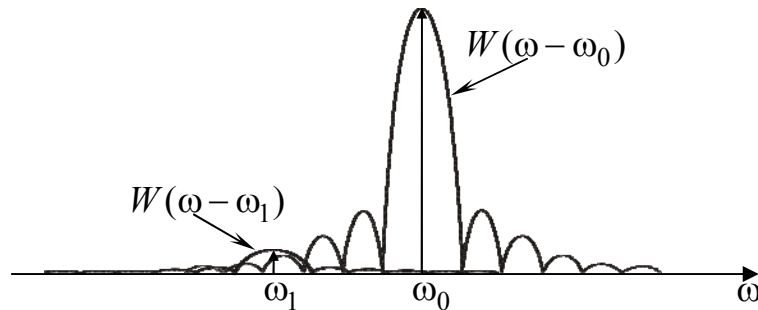


Рис. 1.4. Приклад «розмиття» спектрів при обмеженні інтервалу аналізу

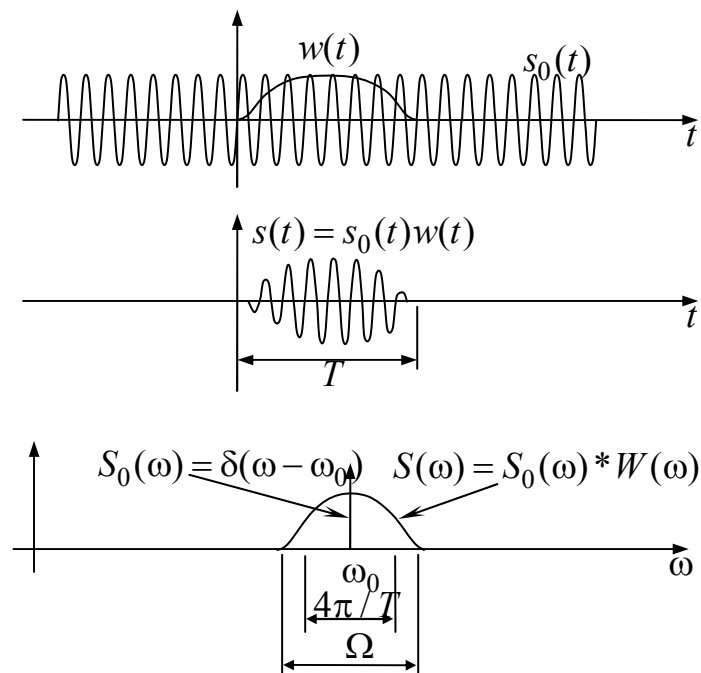


Рисунок 1.5 – Гладка вагова функція

Таким чином, з'явилася можливість виявити слабкі сигнали (рис. 1.6), які раніше втрачалися в бічних пелюстках, але при цьому відбулося розширення основної пелюстки.

Необхідно відзначити, що чим більше заглушення бічних пелюсток спектра віконної функції, тим ширше утворюється головна пелюстка. Це протиріччя привело до розробки великої кількості віконних функцій з різним заглушенням бічних пелюсток і різною

шириною головної пелюстки. Основні поширені вікна будуть розглянуті нижче.

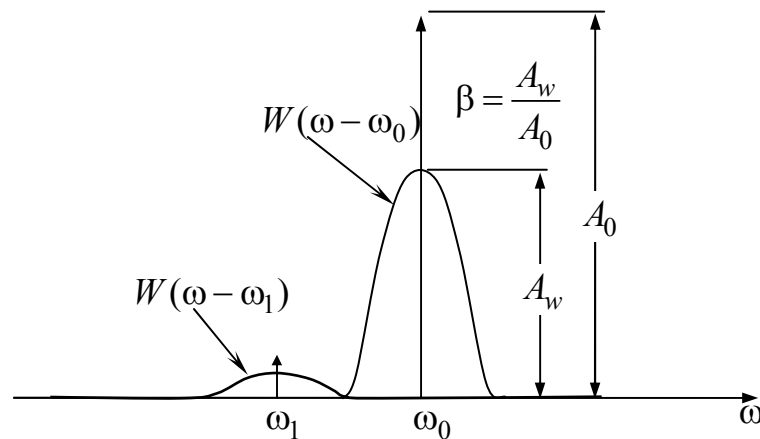


Рис. 1.6. Виявлення слабких сигналів при використанні гладкої вагової функції

Розглянемо ще одну властивість віконної функції, а саме коефіцієнт ослаблення β [1]. Розглянемо постійну складову A_w віконної функції на інтервалі T :

$$A_w = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt.$$

У випадку прямокутного вікна

$$A_{rect} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1.$$

Коефіцієнтом ослаблення β називають відношення постійної складової A_w заданої функції вікна до постійної складової прямокутного вікна A_{rect}

$$\beta = \frac{A_w}{A_{rect}} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt. \quad (1.4)$$

Смисл коефіцієнта ослаблення полягає в тому, що амплітуди всіх спектральних складових після множення на віконну функцію зменшуються в β разів порівняно з прямокутним вікном. Коефіцієнт ослаблення виражають у логарифмічній шкалі (у дБ).

У випадку цифрового спектрального аналізу є N відліків віконної функції $w[n]$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$), узятих через проміжок T_c . Тоді $T = NT_c$ й інтеграл у виразі (1.4) замінюється на суму

$$\beta = \frac{1}{NT_c} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]T_c = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]. \quad (1.5)$$

Для того щоб урахувати коефіцієнт ослаблення після ДПФ, необхідно кожний спектральний відлік поділити на β .

1.4. Деякі поширені вагові функції

Найпростіший спосіб одержання скінченного сигналу довжиною N відліків – це використання прямокутного вікна. Прямокутне вікно визначається так:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N/2, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Використання прямокутного вікна призводить до розтікання спектра. Як вже було сказано вище, для усунення цього ефекту застосовуються так звані зважувальні вікна. Вони плавно зводять нанівець функцію поблизу країв аналізованої ділянки. Вагові вікна мають форму, схожу на гауссіан. Обрана для аналізу ділянка сигналу помножується на вагове вікно, яке усуває розриви функції при «зациклюванні» цієї ділянки сигналу. Віртуальне «зациклювання» відбувається при ДПФ, тому що алгоритм ДПФ вважає, що функція періодична.

Існує безліч вагових вікон, названих на честь їхніх творців. Всі вони мають схожу форму й значною мірою усувають спотворення спектра. Будемо розглядати віконні функції для $-N/2 \leq n \leq N/2$.

Ряд вагових вікон належить до косинусоїдального ряду з кількістю ненульових косинусоїдальних доданків від одного до трьох

$$w[n] = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos \frac{2\pi n}{N} m.$$

Розглянемо найбільш поширені симетричні вагові вікна з урахуванням значень коефіцієнтів, наведених у табл. 1.2 [1, 2].

Таблиця 1.2

Значення коефіцієнтів a_m для вагових функцій, що належать до косинусоїдального ряду

Тип вікна	a_0	a_1	a_2
прямокутне	1,0	0,0	0,0
Хеммінга	0,54	0,46	0,0
Ханна	0,5	0,5	0,0
Блекмана	0,42	0,5	0,08

Одним з найбільш використовуваних є вагове вікно *Хеммінга*, що у загальному вигляді визначається так:

$$w[n] = \alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi n / N).$$

Найчастіше припускають, що $\alpha = 0,54$, тоді

$$w[n] = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n / N).$$

Характеристики прямокутного вікна і вікна *Хеммінга* порівнюються на рис. 1.7 у часовій та частотній ділянках.

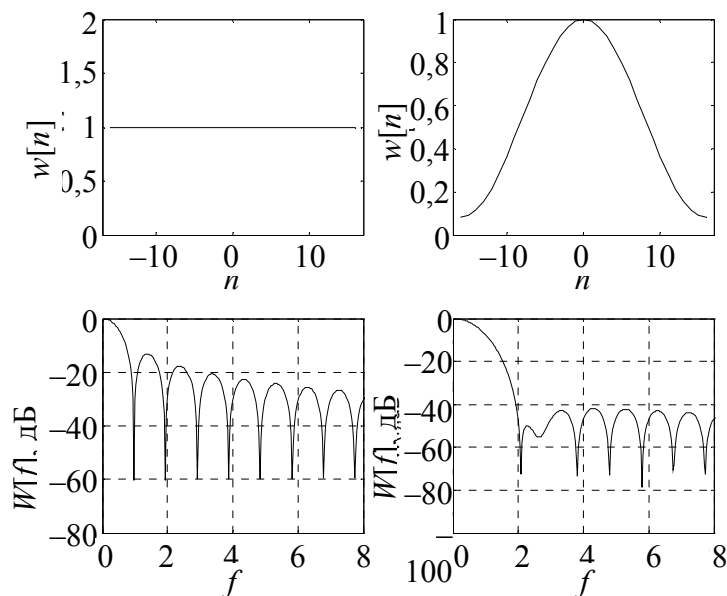


Рис. 1.7. Часові та частотні характеристики прямокутного вікна (ліворуч) і вікна *Хеммінга* (праворуч)

У часовій ділянці функція Хеммінга більш м'яко виходить на нуль з обох сторін. У частотній ділянці амплітуда її головної пелюстки ширша (приблизно вдвічі), ніж амплітуда прямокутної функції, але її бічні пелюстки менші порівняно з головною (приблизно на 40 дБ менші від головної пелюстки порівняно з 14 дБ для прямокутної функції).

Вікно Ханна визначається так:

$$w[n] = 0,5 + 0,5 \cos(2\pi n / N).$$

Для вікна Ханна рівень першої бічної пелюстки становить -31,5 дБ.

Вікно Блекмана визначається так:

$$w[n] = 0,42 + 0,5 \cos(2\pi n / N) + 0,08 \cos(4\pi n / N).$$

Для вікна Блекмана рівень першої бічної пелюстки становить -58 дБ. Вікно Блекмана має трохи ширшу головну пелюстку і менший рівень бічних пелюсток порівняно з вікнами Ханна й Хеммінга тієї ж довжини. На рис. 1.8 зображено розглянуті вище віконні функції та їхні спектри.

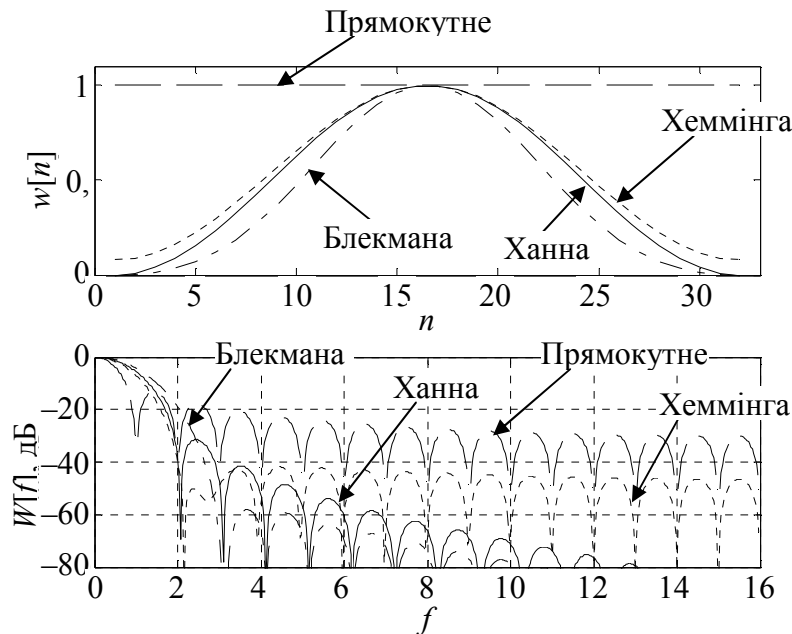


Рис. 1.8. Віконні функції та їхні спектри

Розглянемо ще кілька вагових вікон, що не належать до косинусоїдального ряду [1].

Трикутне вікно визначається так:

$$w[n] = 1 - \frac{|n|}{N/2 - 1}.$$

Вікно Бартлетта визначається так:

$$w[n] = 1 - \frac{|n|}{N/2}.$$

Трикутне вікно дуже схоже на вікно Бартлетта. Вікно Бартлетта завжди має нульові скінченні відліки, тоді як трикутне вікно має ненульові скінченні значення.

Вікно Гаусса визначається так:

$$w[n] = e^{-0,5 \left(\frac{\sigma n}{N/2} \right)^2}.$$

Вікно Кайзера визначається так:

$$w[n] = \frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N} \right)^2} \right]}{I_0(\alpha)},$$

де α – константа, що визначає компроміс між максимальним рівнем бічних пелюсток і шириною головної пелюстки (або часткою енергії в головній пелюстці) частотної характеристики вікна; $I_0(x)$ – функція Бесселя нульового порядку, що обчислюється за виразом

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^L \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2,$$

причому зазвичай $L < 25$.

При $\alpha = 0$ функція Кайзера відповідає прямокутній ваговій функції, а при $\alpha = 5,44$ функція дуже схожа на функцію Хеммінга (хоча і не ідентична їй). Чим більша α , тим більша частка енергії, зосереджена в головній пелюстці спектра (тим ширша ця головна пелюстка), і тим менший рівень бічних пелюсток. На практиці використовуються значення від 4 до 9 (рис. 1.9).

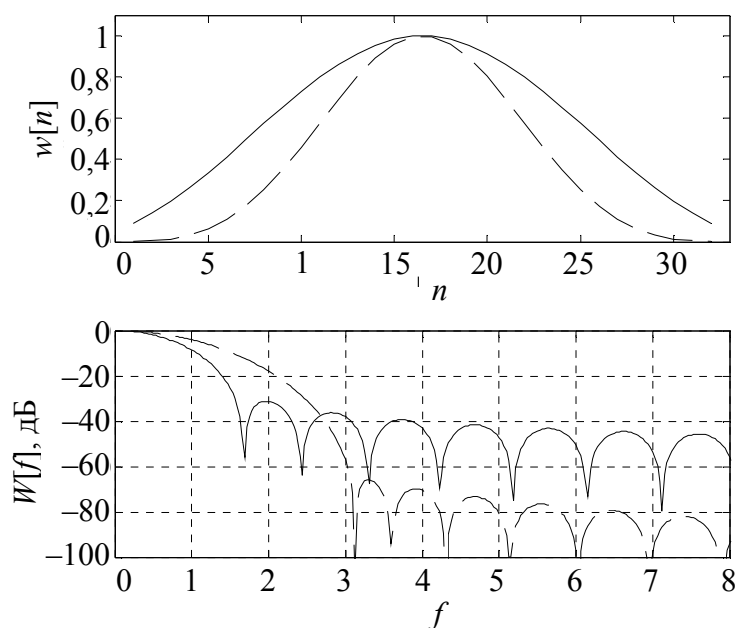


Рис. 1.9. Вікно Кайзера: $\alpha = 4$ (суцільна лінія);
 $\alpha = 9$ (штрихова лінія)

Узагальнимо основні частотні характеристики спектра віконної функції, що дозволяють порівнювати різні вікна між собою. Для цього розглянемо нормовану амплітудно-частотну характеристику $W_H(f_H)$ віконної функції, наведену на рис. 1.10.

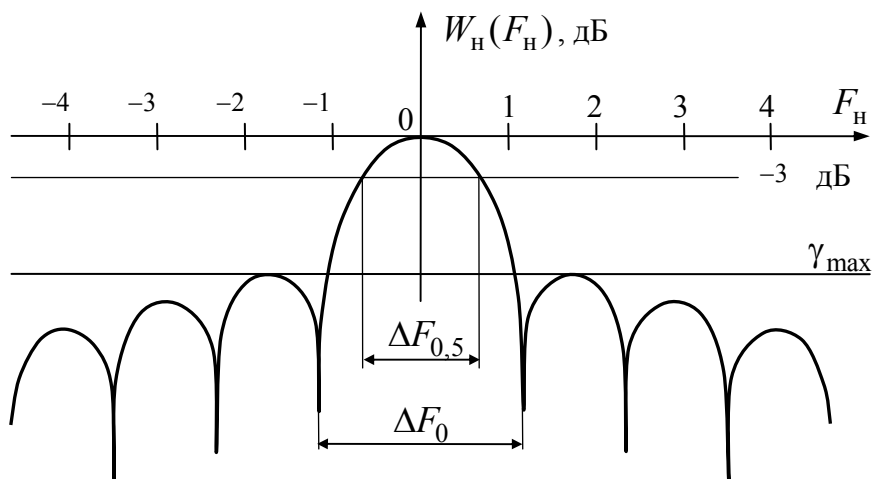


Рис. 1.10. Нормована АЧХ віконної функції

Нормування амплітуди проводиться для врахування коефіцієнта ослаблення β : $W_H(\omega) = W(\omega) / \beta$. Таким чином, всі АЧХ будуть мати максимум рівний одиниці (0 дБ) на нульовій частоті. Оскільки шири-

на головній пелюстці залежить від тривалості вікна в часі (рис. 1.2), то введене нормування частоти

$$F_H = \frac{\omega}{2\pi/T} = \frac{\omega T}{2\pi}.$$

Таким чином, форма нормованої АЧХ віконної функції не буде мінятися при зміні тривалості вікна. Тоді можна ввести такі нормовані параметри (рис. 1.9):

1) нормована ширина головної пелюсткі АЧХ за рівнем 0,5 (–3 дБ) $\Delta F_{0,5}$ визначається як нормована смуга, при якій $W_H(F_H) > -3$ дБ;

2) нормована ширина головної пелюсткі АЧХ за нульовим рівнем $\Delta F_0 = \Omega T / (2\pi)$;

3) максимальний рівень бічних пелюсток γ_{\max} .

Можна зазначити, що ΔF_0 прямокутного вікна дорівнює 2. Тоді можна ввести параметр, що показує у скільки разів нормована ширина головної пелюсткі АЧХ за нульовим рівнем ΔF_0 заданого вікна ширша, ніж ΔF_0 прямокутного вікна. Позначимо цей параметр як $K = \Delta F_0 / 2$. Залежно від параметра K вікна поділяють на вікна високого розділення ($K \leq 3$) і вікна низького розділення $K > 3$. Властивості розглянутих вище віконних функцій наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Властивості деяких віконних функцій

Найменування вікна	ΔF_0	$\Delta F_{0,5}$	K	γ_{\max} , дБ	β , дБ
Прямокутне вікно	2	0,89	1	–13	0
Вікно Бартлетта, трикутне вікно	4	1,33	2	–26,5	–6
Вікно Ханна	4	1,5	2	–31,5	–6
Вікно Хеммінга	4	1,33	2	–42	–5,37
Вікно Блекмана	6	1,7	3	–58	–7,54
Вікно Гаусса $\sigma = 0,3$	8	1,82	4	–65	–8,52
Вікно Гаусса $\sigma = 0,5$	3,4	1,2	1,7	–31,5	–4,48
Вікно Гаусса $\sigma = 1,2$	2,2	0,94	1,1	–15,5	–0,96
Вікно Кайзера $\alpha = 4$	3,25	1,75	1,63	–32,5	–4,62
Вікно Кайзера $\alpha = 9$	6	3,2	3	–66	–7,98

Як видно з табл. 1.3, жодне з вікон не дає можливість поліпшити всі розрахункові характеристики, а лише поліпшує одні з них, за рахунок погіршення інших.

Це правило є універсальним: вибір форми часового вікна не дозволяє зменшити явище розтікання спектра, а лише поліпшує якусь із характеристик. При цьому інші характеристики за рахунок цього погіршуються.

1.5. Задання вагових вікон у пакеті MATLAB

Пакет розширення Signal Processing Toolbox має ряд функцій для задання вагових вікон. Всі функції створюють вектор-стовпець коефіцієнтів вікна відповідного типу. Розмір його задається параметром N . При $N = 1$ всі функції задання вікон повертають значення 1 [2–4].

Для вікон можуть бути побудовані характеристики амплітудного спектра. Для цього може використовуватися функція **freqz** або перегляд характеристик вікна за допомогою програми перегляду **vwtool**. Фазові характеристики для всіх вікон мають лінійний характер і тому особливого інтересу не мають.

При помилках у заданні вікон виводяться відповідні діагностичні повідомлення. Найбільш характерні з них такі:

Rounding order to nearest integer – значення порядку округляється до найближчого цілого;

Order cannot be less than zero – порядок не може бути від’ємним;

Sampling must be either 'symmetric' or 'periodic' – вибірка може бути тільки типу **symmetric** або **periodic** (для функцій із відповідним варіантом).

1.5.1. Задання вікна Бартлетта

Вектор **w** коефіцієнтів **N-точкового** вікна Бартлетта задається функцією **w = bartlett(N)**. Вікно Бартлетта подібно трикутному вікну, але значення вікна Бартлетта при $k=1$ і $k=0$ дорівнює нулю. Команда

```
>> w=bartlett(32); plot(w)
```

будує вікно Бартлетта для $N = 32$.

1.5.2. Задання вікна Блекмана

Вікно Блекмана задається функцією **w = blackman (N [, 'sflag'])**. Вона повертає вектор з N коефіцієнтів цього вікна **w**.

Параметр **sflag** може мати такі значення:

- **symmetric** – задає симетричне вікно (використовується за замовчуванням);
- **periodic** – обчислює вікно для (N+1) точки, але повертає тільки перші N точок. Команда

```
>> w=blackman(32); plot(w)
```

будує вікно Блекмана для N = 32.

1.5.3. Задання прямокутного вікна

Функція **w = boxcar (N)** повертає N-точкове прямокутне вікно, що обчислюється як **w = ones (N, 1)**. Тут і далі ми не наводимо приклади задання вікна, оскільки вони цілком очевидні й користувач може скласти їх за аналогією до наведених прикладів.

1.5.4. Задання вікна Хеммінга

Функція **w = hamming (N [, 'sflag'])** повертає вектор **w** коефіцієнтів **N-точкового** вікна Хеммінга. Опція **sflag** має той же зміст, що й у функції задання вікна Блекмана.

1.5.5. Задання вікна Ханна

Функція **w = hann (N [, 'sflag'])** повертає вектор **w** коефіцієнтів **N-точкового** вікна Ханна. Параметр **sflag** має той же зміст, що й у функції задання вікна Блекмана.

1.5.6. Задання вікна Кайзера

Функція **w = kaiser (N [, alfa])** задає вектор-стовпець **N-точкового** вікна Кайзера. Параметр **alfa** задає загасання бічних пелюсток вікна. Якщо параметр **alfa** не заданий, то за замовчуванням **alfa = 0,5**.

1.5.7. Створення трикутного вікна

Функція **w = triang (N)** повертає вектор-стовпець коефіцієнтів **N-точкового** трикутного вікна. При непарних N це вікно збігається з (N+2)-точковим вікном Бартлетта, за винятком того, що крайні значення не рівні 0.

1.5.8. Задання вікна Гаусса

Функція **w = gausswin (N [, alfa])** повертає вектор **w** коефіцієнтів **N-точкового** вікна Гаусса. Параметр **alfa** задає загасання бічних пелюсток вікна. Якщо параметр **alfa** не заданий, то за замовчуванням **alfa = 2,5**.

1.5.9. Функції задання вікон, нерозглянуті в розділі 2

Наступні кілька функцій служать для задання вікон (нерозглянутих у розділі 2), що мінімізують прояв ефекту Гіббса:

- **w = chenwin (N, R)** – вікно Чебишева (параметр **R** задає рівень бічних пелюсток у дБ);
- **w = barthannwin (N)** – вікно Бартлетта-Ханна (лінійна комбінація вікон Бартлетта і Ханна);
- **w = blackmanharris (N)** – вікно Блекмана-Харріса (на відміну від вікна Блекмана підсумовуються не два, а три косинусоїдальних доданків);
- **w = bohmanwin (N)** – вікно Бохмана (згортка двох однакових косинусоїдальних імпульсів);
- **w = nuttallwin (N)** – версія вікна Блекмана-Харріса, запропонована Натоллом (трохи видозмінені коефіцієнти при підсумовуванні косинусоїдальних доданків);
- **w = tukeywin (N, a)** – вікно Тьюкі (прямокутник із косинусоїдально згладженими краями; при крайніх припустимих значеннях коефіцієнта згладжування отримують прямокутне вікно і вікно Ханна).

1.5.10. Узагальнена функція задання вікон

Узагальнена функція задання вікон **w = window (fhandle, N)** повертає **N-точкове** вікно будь-якого типу, яке задається параметром **fhandle** (дескриптором), що містить символ **@** та ім'я вікна, наприклад **@hamming**.

У наведеному нижче прикладі будуються графіки для трьох вікон, побудовані функцією **window**:

```
N = 65; w = window(@blackmanharris, N);  
w1 = window(@hamming, N);  
w2 = window(@gausswin, N, 2.5);  
subplot (1,1,1);  
plot(1:N,[w,w1,w2]);  
axis([1 N 0 1]);
```

1.6. Побудова графіків амплітудного спектра вікон

Для побудови графіка амплітудного спектра можна використати функцію **freqz**, що ілюструє такий приклад (для вікна Хеммінга):

```
%Приклад №1.1
N=32; %довжина вікна
%вікно Хеммінга
w=hamming(N);
subplot(2,1,1);
%виведення вікна в часовій ділянці
plot(w)
%параметри виведення
xlim([0 33]);
xlabel('n');
ylabel('w[n]')
%нормування коефіцієнтів
w=w/sum(w);
[W,f]=freqz(w,1); %z-перетворення
f=f*N/2/pi; %нормування частоти
subplot(2,1,2);
%виведення АЧХ вікна в логарифмічному масштабі
plot(f, 20*log10 (abs (W))),
grid on
%параметри виведення
xlabel('f');
ylabel('W(f),d');
```

Результат роботи програми наведено на рис. 1.11. Корисно зазначити, що відносні амплітуди нормовані й спектр побудований у логарифмічних одиницях (децибелах). Замінивши функцію визначення вікна, можна побудувати графіки амплітудного спектра і для інших видів вікон.

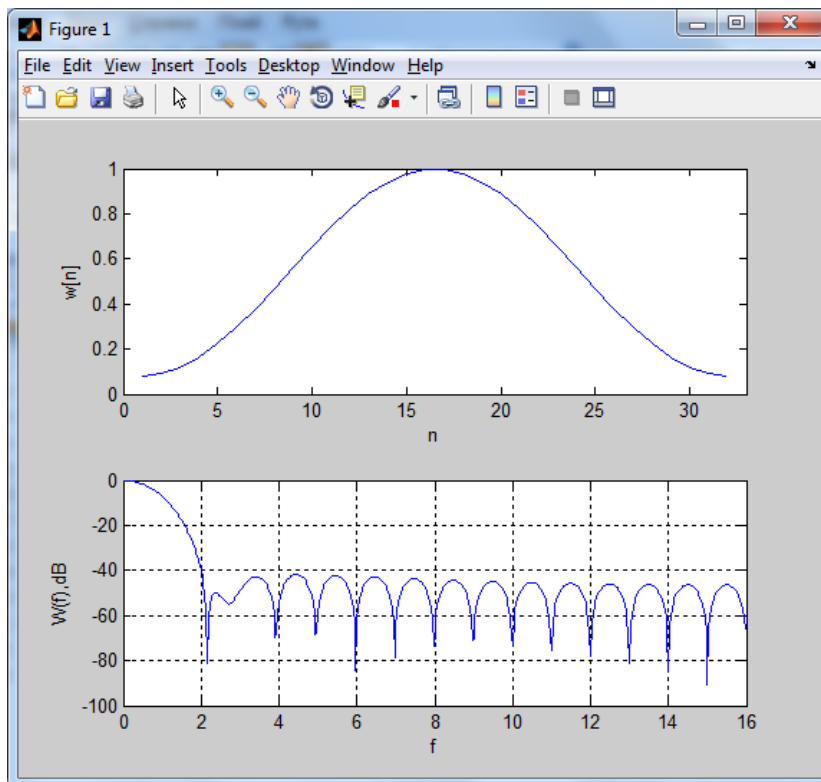


Рис. 1.11. Вікно Хеммінга та його АЧХ

Контрольні запитання

?

1. Для чого використовуються вагові функції?
2. Яку одиницю називають белом?
3. Що вимірюється у децибелах?
4. Як відрізняються спектри гармонічного безперервного нескінченного сигналу та обмеженого у часі сигналу?
5. Як змінюється спектр гармонічного обмеженого у часі сигналу зі збільшенням інтервалу аналізу?
6. У якому випадку спостерігається ефект «розмивання» («розмазування») спектра?
7. Для чого використовуються гладкі вагові функції?
8. Чим відрізняється спектр прямокутного вікна від спектрів гладкої вагової функції?
9. Що показує коефіцієнт ослаблення β ?
10. У яких одиницях вимірювання виражають коефіцієнт ослаблення?
11. Як враховують коефіцієнт ослаблення після ДПФ?

12. Які вагові функції належать до косинусоїдального ряду?
13. Чим відрізняється спектр вікна Хеммінга від прямокутного вікна?
14. Які вагові функції не належать до косинусоїдального ряду?
15. Порівняйте між собою спектри таких вікон: Ханна, Хеммінга, Блекмана.
16. Як змінюється спектр вікна Кайзера зі зміненням параметра α ?
17. Які вікна називаються вікнами низького та високого розділення?
18. Чому не можна поліпшити всі разом характеристики вагового вікна?
19. Як за допомогою пакета MATLAB побудувати графіки амплітудних спектрів вагових функцій?

2. ПРОЕКТУВАННЯ ФІЛЬТРІВ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ (СІХ-ФІЛЬТРІВ) МЕТОДОМ ЗВАЖУВАННЯ

2.1. Введення в цифрові фільтри

По суті, фільтр – це система або ланцюг, яка вибірково змінює форму сигналу (амплітудно-частотну або фазово-частотну характеристику). Основними цілями фільтрації є поліпшення якості сигналу (наприклад, усунення або зниження перешкод), добування із сигналів інформації або розподіл декількох сигналів, об'єднаних раніше для, наприклад, ефективного використання доступного каналу зв'язку.

Важливу роль у цифровій обробці сигналів відіграють цифрові фільтри (ЦФ). Порівняно з аналоговими фільтрами вони кращі у багатьох сферах (наприклад, стиснення даних, біомедична обробка сигналів, обробка мовлення, обробка зображень, передача даних, цифрове аудіо, телефонне ехозаглушення), оскільки володіють рядом переваг, частина з яких описана нижче [5].

- ЦФ можуть мати характеристики, отримати які на аналогових фільтрах неможливо, наприклад, дійсно лінійну фазочастотну характеристику (ФЧХ).

- На відміну від аналогових, продуктивність цифрових фільтрів не залежить від змін середовища, наприклад, від коливань температури. Таким чином, цифрові фільтри не потребують періодичного калібрування.

- Якщо фільтр побудований із використанням програмованого процесора, його частотна характеристика може настроюватися автоматично (тому такі процесори широко застосовуються в адаптивних фільтрах).

- Один цифровий фільтр може обробляти кілька вхідних сигналів або каналів без дублювання апаратних блоків.

- Як фільтровані, так і нефільтровані дані можна зберегти для наступного використання.

- Можна легко використовувати досягнення зі сфери технологій НВІС (надвеликих інтегральних схем) і одержувати невеликі цифрові фільтри зі зниженою споживаною потужністю й більш низькою ціною.

- На практиці точність, якої можна досягти при використанні аналогових фільтрів, обмежена; наприклад, загасання в смузі заглушення не можна підняти вище 60–70 дБ (якщо використовувати стандартні аналогові компоненти). Точність ЦФ обмежена тільки довжиною слова, що використовується.

- Продуктивність ЦФ однакова для всіх пристроїв серії.

- ЦФ можуть використовуватися при дуже низьких частотах, характерних, наприклад, для багатьох біомедичних застосувань, де непрактично застосовувати аналогові фільтри. Крім того, ЦФ можуть використовуватися у великому діапазоні частот, для чого досить просто змінювати частоту дискретизації.

Однак порівняно з аналоговими ЦФ мають і ряд недоліків [5].

- Обмеження швидкості. Максимальна ширина смуги сигналів, які в реальному часі здатні обробити ЦФ, значно вужча, ніж в аналогових фільтрів. У реальному часі процес перетворення «аналоговий–цифровий–аналоговий» вводить обмеження щодо швидкості на продуктивність цифрового фільтра. Найвищу частоту дискретизації, з якою може працювати фільтр, обмежує час конвертації аналого-цифровим перетворювачем (АЦП) і час установлення сигналу цифро-аналоговим перетворювачем (ЦАП). Крім того, швидкість роботи ЦФ залежить від швидкості роботи використовуваного цифрового процесора і кількості арифметичних операцій, які необхідно виконати в алгоритмі фільтрації, і підвищується, коли характеристика фільтра стає більш стислою.

- Вплив скінченної розрядності. Цифрові фільтри схильні до шуму АЦП, який відбувається від квантування безперервного сигналу і шуму заокруглення, що вводиться при обчисленнях. При використанні рекурсивних фільтрів високих порядків нагромадження шуму заокруглення може призвести до нестійкості фільтра (для НІХ-фільтрів).

- Значний час розробки та впровадження. Розробка та впровадження ЦФ, особливо впровадження апаратного забезпечення, мо-

жуть виконуватися набагато довше, ніж подібні процедури для аналогових фільтрів. У той же час, один раз розроблене апаратне і/або програмне забезпечення може використовуватися в інших задачах цифрової обробки сигналів з незначною модифікацією або взагалі без змін. Якщо при проектуванні ЦФ доступна хороша комп'ютерна підтримка, цю задачу буде досить цікаво розв'язувати, хоча для того, щоб ефективно і повно використовувати таку підтримку, потрібно певне уміння.

2.2. Етапи проектування цифрових фільтрів

Проектування цифрового фільтра містить у собі 5 етапів (рис. 2.1).

1) Специфікація фільтра. Задається тип фільтра, (наприклад, фільтр нижніх частот), амплітудна і/або фазова характеристика та дозвалені допуски (якщо вони є), частота дискретизації й довжина слів, якими будуть подані вхідні дані.

2) Обчислення коефіцієнтів. Визначаються коефіцієнти передавальної функції $H(z)$, яка задовольняє специфікаціям.

3) Вибір структури. Виконується перетворення передавальної функції в придатну фільтруючу структуру або мережу.

4) Аналіз наслідків скінченної розрядності. Оцінюється вплив квантування на коефіцієнти фільтра та вхідні дані, а також вплив на продуктивність фільтра операції фільтрації зі словами скінченної довжини.

5) Втілення. Розробляється програмний код і/або апаратний блок і виконується власне фільтрація.

Названі п'ять етапів не завжди незалежні; крім того, вони не завжди розташовуються в указаному порядку. Фактично існують методи, які дозволяють об'єднати другий етап і деякі аспекти третього й четвертого. Щоб отримати ефективний фільтр, іноді доводиться проводити цей процес у кілька ітерацій, особливо, якщо специфікації не є зовсім визначеними (як зазвичай і буває), або ж розробник бажає досліджувати альтернативні структури. Опис названих п'яти етапів наведено нижче [5].

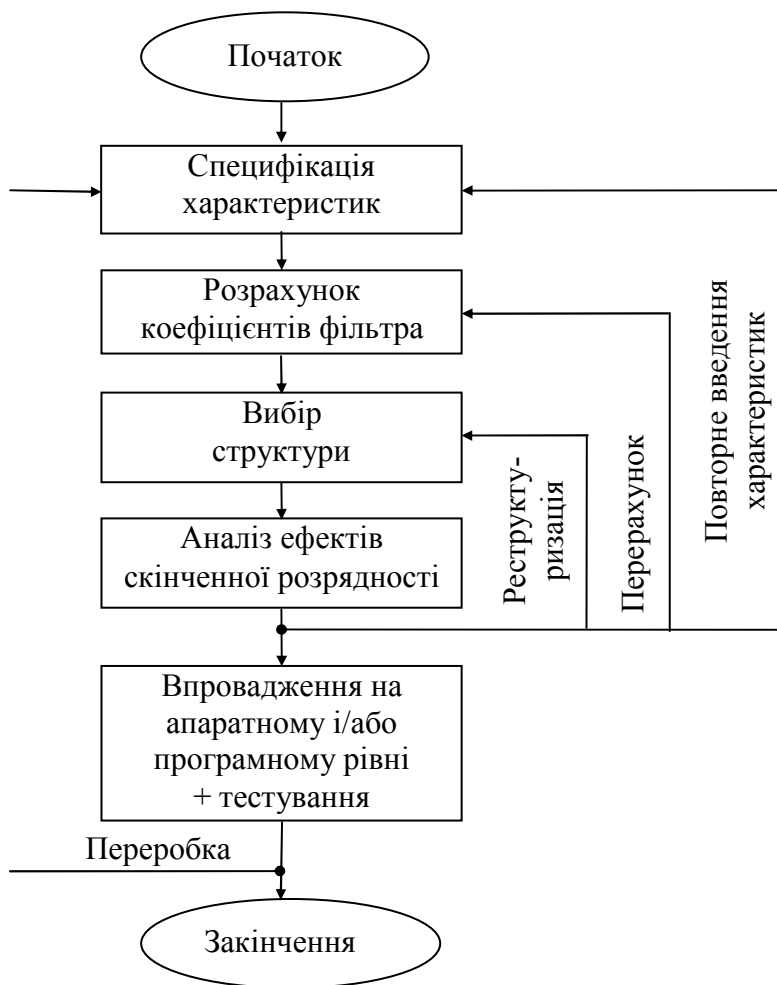


Рис. 2.1. Етапи розробки цифрових фільтрів

2.3. Специфікація вимог

Специфікація вимог включає специфікації [5]:

1) характеристик сигналів (тобто джерела й одержувача сигналу, інтерфейс введення–виведення, швидкість передачі даних і ширина смуги, найвища частота, що має практичний інтерес);

2) характеристик фільтра (бажана амплітудна і/або фазова характеристика й те, наскільки строгі ці вимоги, швидкість роботи та режими фільтрації (реальний або модельний час));

3) принципу реалізації (наприклад, як комп'ютерної програми мовою високого рівня або як системи цифрової обробки сигналів на базі процесора, тут же виконується вибір процесора сигналів);

4) інших вимог до структури (наприклад, вартість фільтра). Розробник може не мати достатньо інформації, щоб повністю визначити

фільтр на початкових етапах, але для спрощення процесу розробки варто сформулювати максимальну кількість вимог.

Хоча перераховані вище вимоги уточнюються залежно від конкретної задачі, деяким аспектам специфікації характеристик фільтра необхідно приділити особливу увагу.

Характеристики ЦФ часто задаються в частотній ділянці [5]. Для частотно-вибіркових фільтрів, таких як фільтри нижніх частот (ФНЧ), фільтри високих частот (ФВЧ), смугові фільтри (СФ) або режекторні фільтри (РФ), специфікації часто формулюються у вигляді схем допусків. Приклад подібних схем для ЦФ наведено на рис. 2.2 (для ФВЧ) і рис. 2.3 (для СФ). Горизонтальні лінії позначають межі допустимих відхилень. У смузі пропускання амплітудна характеристика має пікове відхилення $\delta_{\text{п}}$, а в смузі заглушення – максимальне відхилення $\delta_{\text{с}}$.

Ширина смуги переходу визначає, наскільки різкою є характеристика фільтра. У цій ділянці амплітудна характеристика монотонно зменшується від смуги пропускання до смуги заглушення. Інтерес становлять такі ключові параметри:

$\delta_{\text{п}}$ – відхилення в смузі пропускання;

$\delta_{\text{с}}$ – відхилення в смузі заглушення;

$f_{\text{п}}$ – гранична частота смуги пропускання;

$f_{\text{с}}$ – гранична частота смуги заглушення.

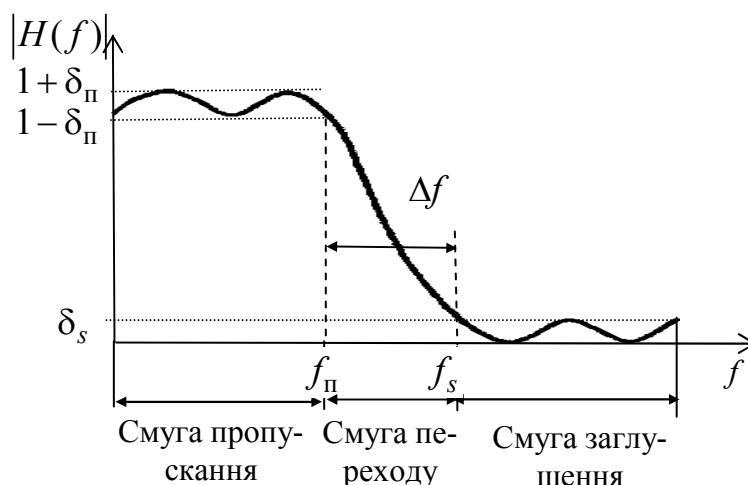


Рис. 2.2. Схема допусків для фільтра нижніх частот

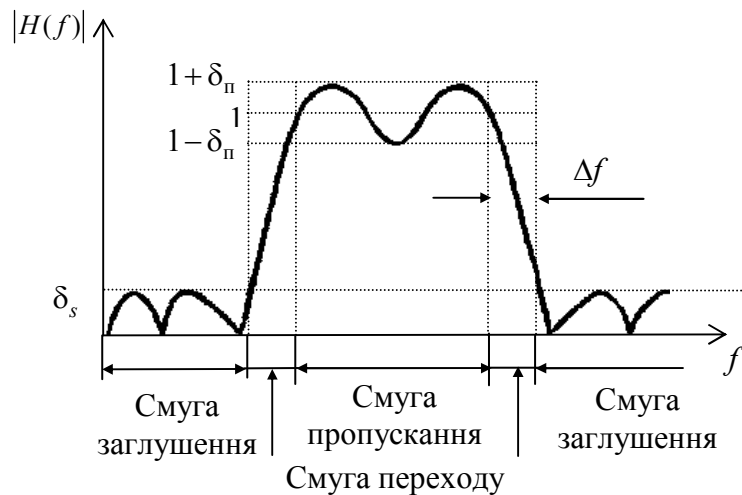


Рис. 2.3. Схема допусків для смугового фільтра

Граничні частоти іноді нормують до частоти дискретизації f / f_c . Але частіше в специфікації використовуються стандартні одиниці частоти, тобто Гц або кГц. Відхилення в смузі пропускання визначають нерівномірність у смузі пропускання, а відхилення в смузі заглушення – загасання в смузі заглушення. Відхилення в смузі пропускання і смузі заглушення можуть виражатися як звичайними числами, так і в децибелах. Отже, мінімальне загасання в смузі заглушення A_s і максимальна нерівномірність у смузі пропускання A_π в децибелах для СІХ-фільтрів записуються так:

$$A_s = -20 \lg \delta_s; \quad (2.1)$$

$$A_\pi = 20 \lg(1 + \delta_\pi). \quad (2.2)$$

Величина $\Delta f = f_s - f_\pi$ називається смугою переходу фільтра. Ще один важливий параметр – це порядок фільтра N , який визначає кількість коефіцієнтів фільтра.

При специфікації фазової характеристики цифрових фільтрів у багатьох випадках достатньо вказати, що фазове спотворення суттєве або що бажана лінійна фазова характеристика. У той же час, у деяких застосуваннях, де фільтри використовуються для вирівнювання або компенсації фазової характеристики системи або як фазообертачі, фазову характеристику задавати потрібно.

Оскільки у СІХ-фільтрів ФЧХ завжди лінійна, то в специфікації вимог для нерекурсивних фільтрів вимоги до ФЧХ не вказуються.

У більшості випадків указані параметри повністю визначають частотну характеристику СІХ-фільтра.

Існують і інші специфікації, які можуть становити практичний інтерес, наприклад, специфікація максимального прийнятного порядку фільтра. Таке обмеження вводиться у випадку, якщо можлива швидкість обробки – фіксована.

2.4. Обчислення коефіцієнтів методом зважування

Розглянемо фільтр нижніх частот. Оскільки частотна характеристика будь-якого ЦФ є періодичною функцією, то імпульсну характеристику (ІХ) фільтра можна обчислити за допомогою зворотного перетворення Фур'є заданої частотної характеристики:

$$H_3(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{\Pi}, \\ 0, & \omega_{\Pi} < |\omega| < \pi / T_c. \end{cases}$$

Використовуючи зворотне перетворення Фур'є дискретних сигналів, визначимо ІХ фільтра:

$$\begin{aligned} h_3[n] &= \frac{T_c}{2\pi} \int_{-\pi/T_c}^{\pi/T_c} H_3(\omega) e^{j\omega n T_c} d\omega = \\ &= \frac{T_c}{2\pi} \int_{-\omega_{\Pi}}^{\omega_{\Pi}} \cos(\omega n T_c) d\omega = \frac{T_c}{2\pi} \frac{\sin(\omega n T_c)}{n T_c} \Big|_{-\omega_{\Pi}}^{\omega_{\Pi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi n} [\sin(\omega_{\Pi} n T_c) - \sin(-\omega_{\Pi} n T_c)] = \\ &= 2 f_{\Pi} T_c \frac{\sin(2\pi f_{\Pi} n T_c)}{2\pi f_{\Pi} n T_c} = \frac{f_{\Pi}}{f_N} \frac{\sin(\pi n f_{\Pi} / f_N)}{\pi n f_{\Pi} / f_N} = f_{\Pi}^H \operatorname{sinc}(f_{\Pi}^H \pi n), \end{aligned}$$

де $f_N = 1 / 2T_c$ – частота Найквіста; $f_{\Pi}^H = f_{\Pi} / f_N$ – нормована частота зрізу.

Аналогічно можна отримати ІХ фільтрів верхніх частот, смугових і режекторних фільтрів. Для їхнього розрахування можна скористатися такими фактами:

$$\begin{aligned}
H_3^{\Phi\text{ВЧ}}(\omega) &= 1 - H_3^{\Phi\text{НЧ}}(\omega) \Rightarrow h_3^{\Phi\text{ВЧ}}[n] = \delta[n] - h_3^{\Phi\text{НЧ}}(\omega); \\
H_3^{\Pi\Phi}(\omega) &= H_3^{\Phi\text{НЧ}2}(\omega) - H_3^{\Phi\text{НЧ}1}(\omega) \Rightarrow \\
h_3^{\Pi\Phi}[n] &= h_3^{\Phi\text{НЧ}2}(\omega) - h_3^{\Phi\text{НЧ}1}(\omega); \\
H_3^{\text{РФ}}(\omega) &= 1 - H_3^{\Pi\Phi}(\omega) \Rightarrow h_3^{\text{РФ}}[n] = \delta[n] - h_3^{\Pi\Phi}(\omega).
\end{aligned}$$

У табл. 2.1 наведено ідеальні ІХ всіх 4-х типів фільтрів.

Таблиця 2.1

Ідеальні ІХ стандартних частотно-вибіркових
фільтрів (для нормованих частот)

Тип фільтра	$h_3[n]$	$h_3[0]$
ФНЧ	$f_{\Pi}^{\text{H}} \text{sinc}(f_{\Pi}^{\text{H}} \pi n)$	f_{Π}^{H}
ФВЧ	$\delta[n] - f_{\Pi}^{\text{H}} \text{sinc}(f_{\Pi}^{\text{H}} \pi n)$	$1 - f_{\Pi}^{\text{H}}$
СФ	$f_2^{\text{H}} \text{sinc}(f_2^{\text{H}} \pi n) - f_1^{\text{H}} \text{sinc}(f_1^{\text{H}} \pi n)$	$f_2^{\text{H}} - f_1^{\text{H}}$
РФ	$\delta[n] + f_1^{\text{H}} \text{sinc}(f_1^{\text{H}} \pi n) - f_2^{\text{H}} \text{sinc}(f_2^{\text{H}} \pi n)$	$1 + f_1^{\text{H}} - f_2^{\text{H}}$

Ідеальні ІХ визначені для всіх цілих значень n і є нескінченними, тому такі ЦФ фізично не можуть бути реалізовані. Для фізичної реалізації ЦФ необхідно, щоб ІХ мала каузальний характер, тому необхідно ІХ затримати на K відліків і обмежити значення n , тобто

$$h[n] = h_3[n - M], \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Фактично обмеження ІХ рівносильне накладенню на безперервну ІХ прямокутного вікна [2, 5, 6]:

$$h[n] = h_3[n - M]w[n], \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

де $w[n]$ – прямокутне вагове вікно довжиною N відліків.

З метою забезпечення лінійності ФЧХ вагові вікна повинні бути симетричними $w[n] = w[N - k - 1]$ і визначені для $0 \leq n \leq N - 1$.

Синтезовані таким чином СІХ-фільтри мають значні пульсації в районі частоти зрізу. Ці пульсації називаються ефектом Гіббса. Цей ефект обумовлений обмеженням тривалості ІХ. Причому при збільшенні порядку фільтра частота пульсацій збільшується, а їх амплітуда залишається незмінною. Ефект Гіббса пов'язаний з пульсуючою

поведінкою частотної характеристики прямокутного вагового вікна. Для зменшення негативного впливу ефекту Гіббса застосовують вагові вікна, відмінні від прямокутного [2, 5–8].

Основні характеристики найпоширеніших вагових функцій подано в табл. 2.2. Відзначимо, що перші чотири функції мають фіксовані характеристики, такі як ширина переходу і загасання в смузі заглушення. Отже, їхнє використання обмежує свободу розробника.

Таблиця 2.2

Характеристики поширених вагових функцій

Функція	Δf (нормована на f_N)	A_{Π} , дБ	γ_{\max} , дБ	A_s , дБ	Формула для $0 \leq n \leq N-1$
Прямокутна	$1,8 / N$	0,7416	-13	21	1
Ханна	$6,2 / N$	0,0546	-31,5	44	$0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Хеммінга	$6,6 / N$	0,0194	-42	53	$0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Блекмана	$11 / N$	0,0017	-58	75	$0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Кайзера $\alpha = 4,54$	$5,86 / N$	0,0274	-35	50	$\frac{I_0\left[\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right]}{I_0(\alpha)}$
Кайзера $\alpha = 6,76$	$8,64 / N$	0,00275	-50,5	70	
Кайзера $\alpha = 8,96$	$11,42 / N$	0,000275	-65	90	

Відзначимо також, що фільтр, побудований за допомогою методу зважування, має рівні нерівномірності в смузі пропускання і смузі заглушення, тобто $\delta_{\Pi} = \delta_s$ (рис. 2.2 і 2.3). На практиці це обмеження може дати фільтр, нерівномірність якого в смузі пропускання буде надмірно малою.

Вікно Кайзера трохи згладжує описані вище проблеми, оскільки має параметр, керуючий нерівномірністю, що дозволяє розробнику грати на компромісах між шириною переходу й нерівномірністю. Для вікна Кайзера є емпірична формула для знаходження параметра α :

$$\alpha = \begin{cases} 0, & A \leq 21, \\ 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21), & 21 < A < 50, \\ 0,1102(A-8,7), & A \geq 50, \end{cases} \quad (2.3)$$

де $A = -20\lg(\delta)$ – загасання в смузі заглушення, $\delta = \min(\delta_n, \delta_s)$.

Кількість коефіцієнтів фільтра N підпорядковується залежності

$$N \geq \frac{A - 7,95}{7,18\Delta f}, \quad (2.4)$$

де Δf – нормована на частоту Найквіста ширина смуги переходу.

З табл. 2.2 видно, що використання вагових функцій дозволяє досягти заглушення бічних пелюсток, що перевищують 90 дБ. Однак необхідно пам'ятати про те, що зменшення рівня бічних пелюсток неминуче призводить до розширення перехідної зони між смугами пропускання та затримування. Тому потрібно вибирати вагову функцію виходячи з вимог, що ставлять до параметрів фільтра.

Переваги методу:

- 1) не потребує складних обчислень;
- 2) точність апроксимації підвищується збільшенням порядку фільтра;
- 3) дозволяє отримувати аналітичні вирази для визначення коефіцієнтів фільтрів.

Основним недоліком методу є складність визначення граничних частот і нерівномірний розподіл помилок апроксимації за частотним діапазоном.

2.5. Вплив скінченної розрядності на цифрові СІХ-фільтри

Існує 4 механізми впливу скінченної розрядності на продуктивність цифрових СІХ-фільтрів [2, 5, 9].

- 1) *Шум АЦП*. Це звичний шум квантування АЦП, що присутній, коли на вхід фільтра подається аналоговий шум. Вплив цього фактора можна знизити, використавши додаткові біти, що узгоджуються із власним шумом сигналу, і/або застосувавши метод обробки при декількох швидкостях для поліпшення відношення сигнал/шум.

2) *Помилки квантування коефіцієнтів.* Виникають від подання коефіцієнтів фільтра скінченною кількістю бітів.

3) *Помилки округлення при квантуванні результатів арифметичних операцій.* Ці помилки можуть з'являтися, наприклад, при відкиданні молодших розрядів перед запам'ятовуванням результату множення. Ці помилки знижують відношення сигнал/шум.

4) *Арифметичне переповнення.* Виникає, коли часткові суми або вихід фільтра перевищує дозволenu довжину слова системи. По суті, з появою переповнення вихідна вибірка буде невірною, зазвичай це зміна знака.

2.5.1. Помилки квантування коефіцієнтів

Коефіцієнти фільтра, отримані будь-яким методом апроксимації (наприклад, методом зважування), зазвичай досить точні до певних знаків у десятковому записі. Для реалізації фільтра коефіцієнти потрібно подати фіксованою кількістю бітів, яка найчастіше визначається довжиною слова процесора, що використовується.

У цьому випадку вводиться помилка, яка призводить до відхилення частотної характеристики фільтра із скінченною довжиною слова від бажаної частотної характеристики. У деяких випадках це відхилення означає, що фільтр уже не задовольняє початковій специфікації.

У конкретному завданні розробки фільтра підходящу довжину слова можна визначити, отримавши частотні характеристики для декількох різних розмірів коефіцієнтів. За цими даними визначається мінімальна кількість бітів, необхідна для задоволення специфікації. Крім того, суттєву інформацію про розробку фільтрів із скінченною довжиною слова можна отримати, аналізуючи помилки, які вводяться при квантуванні коефіцієнтів.

Квантовані й неквантовані коефіцієнти, $h_q[n]$ і $h[n]$, відповідно пов'язані співвідношенням

$$h_q[n] = h[n] + e[n], n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

де $e[n]$ – помилка між квантованими й неквантованими коефіцієнтами.

У частотній ділянці вираз (2.5) має вигляд:

$$H_q(j\omega) = H(j\omega) + E(j\omega),$$

де $H_q(j\omega)$, $H(j\omega)$ – частотні характеристики фільтрів із квантованими й неквантованими коефіцієнтами відповідно; $E(j\omega)$ – помилка бажаної частотної характеристики, яка обчислюється за виразом

$$E(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e[n]e^{-j\omega n}.$$

Метою розробника є обмеження амплітуди помилки $E(j\omega)$, щоб частотна характеристика реального фільтра задовольняла специфікації.

Для частотно-вибіркових фільтрів (ФНЧ, ФВЧ, СФ, РФ) було знайдено вирази для меж помилок частотної характеристики. Ці межі можна використовувати при визначенні підходящої довжини коефіцієнтів даного фільтра.

Для СІХ-фільтра, реалізованого в прямій формі, із квантуванням через округлення найбільш часто використовуються такі межі:

$$|E(j\omega)| = N2^{-B}; \quad (2.6)$$

$$|E(j\omega)| = 2^{-B}\sqrt{N/3}; \quad (2.7)$$

$$|E(j\omega)| = 2^{-B}\sqrt{(N \ln N)/3}, \quad (2.8)$$

де B – кількість бітів, які подають кожний коефіцієнт; N – довжина ЦФ.

Межа (2.6) – це абсолютно верхня межа, виведена у припущенні найгіршої ситуації (песимістична межа). Межі (2.7) і (2.8) являють собою статистичні межі й можуть дати більш точну оцінку частотної характеристики і довжини коефіцієнтів. При виведенні меж передбачалося, що помилки квантування $e[n]$ рівномірно розподілені й мають нульове середнє.

2.5.2. Помилки округлення

Різницеве рівняння СІХ-фільтра має такий вигляд:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} b_m x[n-m]. \quad (2.9)$$

В (2.9) кожна змінна подається скінченною кількістю бітів. Як правило, вхідні й вихідні вибірки подаються розміром 12 біт кожна, а коефіцієнти подають розміром 16 біт у форматі доповнення до двох.

З рівняння (2.9) видно, що вихід фільтра – це сума добутків b_m і $x[n-m]$. Після кожного множення добуток містить більше бітів, ніж $x[n-m]$ або b_m окремо. Наприклад, якщо 12-бітовий вхід помножити на 16-бітовий коефіцієнт, то результат розміром 28 біт необхідно квантувати до попередніх 16 біт (якщо далі його потрібно занести в пам'ять) або до 12 біт (якщо треба його подати на вихід АЦП). Квантування призводить до помилок, вплив яких подібний до впливу шуму АЦП, але іноді виявляється й більш значно. Як правило, в таких випадках для квантування результату арифметичної операції або результат усикається, тобто залишаються тільки старші біти і відкидаються молодші, або результат округлюється, тобто вибираються старші біти, найбільш близькі до неокругленого результату. Для реалізації цього до результату додається половина молодшого розряду.

Помилки округлення можна мінімізувати, якщо точно подати всі добутки в регістрах подвійної довжини, а результати округляти після одержання фінальної суми, тобто після обчислення $y[n]$. Такий підхід призводить до меншої помилки, ніж альтернативний метод округлення кожного добутку окремо до підсумовування.

2.5.3. Помилки переповнення

Переповнення відбувається, коли сума двох чисел, як правило великих чисел одного знака, перевищує дозволenu довжину слова. Якщо остаточний вихід $y[n]$ узгоджується за розміром із даною довжиною слова, переповнення в часткових сумах несуттєве. Ця властивість обумовлена особливістю арифметики з доповненням до двох.

Якщо вихід $y[n]$ не вміщується в дозвалені межі, то, очевидно, що значення вихідної вибірки, поданої, наприклад, у ЦАП, буде

невірним. Можна детектувати і коректувати переповнення, але витрати в цьому випадку можуть бути великими. Інший спосіб полягає в масштабуванні коефіцієнтів і/або вхідних даних, щоб уникнути переповнення або тримати його в певних рамках. Масштабувати можна одним із таких способів:

$$b_m = \frac{b_m}{\sum_{k=0}^{N-1} |b_k|}; \quad (2.10)$$

$$b_m = \frac{b_m}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (b_k)^2}}. \quad (2.11)$$

Якщо використовувати перетворення (2.10), переповнення не відбудеться ніколи, але масштабування в такому вигляді часто надмірне, тому що розраховане на найгірший варіант переповнення, що на практиці практично нереально. Крім того, такий підхід вводить більший шум квантування коефіцієнтів, ніж метод із використанням перетворення (2.11), у якому передбачається, що переповнення відбувається час від часу.

Подібно коефіцієнтам можна масштабувати вхідні дані, що часто приводить до поліпшення відношення сигнал/шум.

Третій підхід – це масштабувати вхід і вихід так, щоб отримати найкраще можливе відношення сигнал/шум. Ефективним є масштабування з масштабом, що є степенем двійки.

2.6. Реалізація методу зважування в пакеті MATLAB

Для проектування СІХ-фільтрів методом зважування служить функція **fir1** [2–4]:

b=fir1(N,fn,'ftype',window,'normalization')

У найпростішій формі **b=fir1(N,fn)** ця функція створює вектор із $N+1$ коефіцієнтів ФНЧ із СІХ і лінійною АЧХ для заданої нормованої колової частоти зрізу **fn** (задається від 0 до 1). Для ФВЧ і

РФ порядок фільтра N має бути парним. При цьому використовується вікно Хеммінга. Передавальна характеристика фільтра має вигляд

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} b_m z^{-m}.$$

Для конструювання смугового фільтра потрібно задати **fn** як вектор із двох частот **fn** = [**f1 f2**], причому $f_1 < f < f_2$. А для конструювання багатосмугового фільтра достатньо задати багатокомпонентний вектор частот, наприклад, **fn** = [**f1 f2 f3 fn**]. Смуги пропускання та затримки фільтра чергуються і задаються співвідношеннями: $0 < f < f_1$, $f_1 < f < f_2$, ..., $f_n < f < 1$. Параметр '**ftype**' дозволяє задати тип ЦФ:

- **ftype=high** – ФВЧ із частотою зрізу **fn**;
- **ftype=stop** – загороджуючий фільтр;
- **ftype='DC-1'** – багатосмуговий фільтр, у якого перша смуга є смугою пропускання;
- **ftype='DC-0'** – багатосмуговий фільтр, у якого перша смуга є смугою затримки.

Вектор **window** розміром $N + 1$ дозволяє задавати відліки вікна, а параметр '**normalization**' керує нормалізацією (масштабуванням). Цей параметр може мати такі значення:

- '**scale**' – нормалізація використовується (значення за замовчуванням) так, що в центрі смуги пропускання значення АЧХ задається рівним 0 дБ;
- '**noscale**' – нормалізація не використовується.

Алгоритм, покладений в основу функції **fir1**, досить простий. Відліки імпульсної характеристики фільтра обчислюються за формулою **b(n) = w(n)h(n)**. При цьому **w(n)** – вікно і **h(n)** – імпульсна характеристика ідеального фільтра. Якщо фільтр даного порядку побудувати не вдається, то порядок фільтра автоматично збільшується на 1.

Для ілюстрації застосування функції **fir1** розглянемо приклад побудови СФ 32-го порядку з граничними частотами 0,3 і 0,7:

b=fir1(32,[0.3 0.7]); freqz(b,1,512)

АЧХ і ФЧХ фільтра подано на рис. 2.4. Потрібно зазначити, що в смузі пропускання ФЧХ дійсно має лінійний характер.

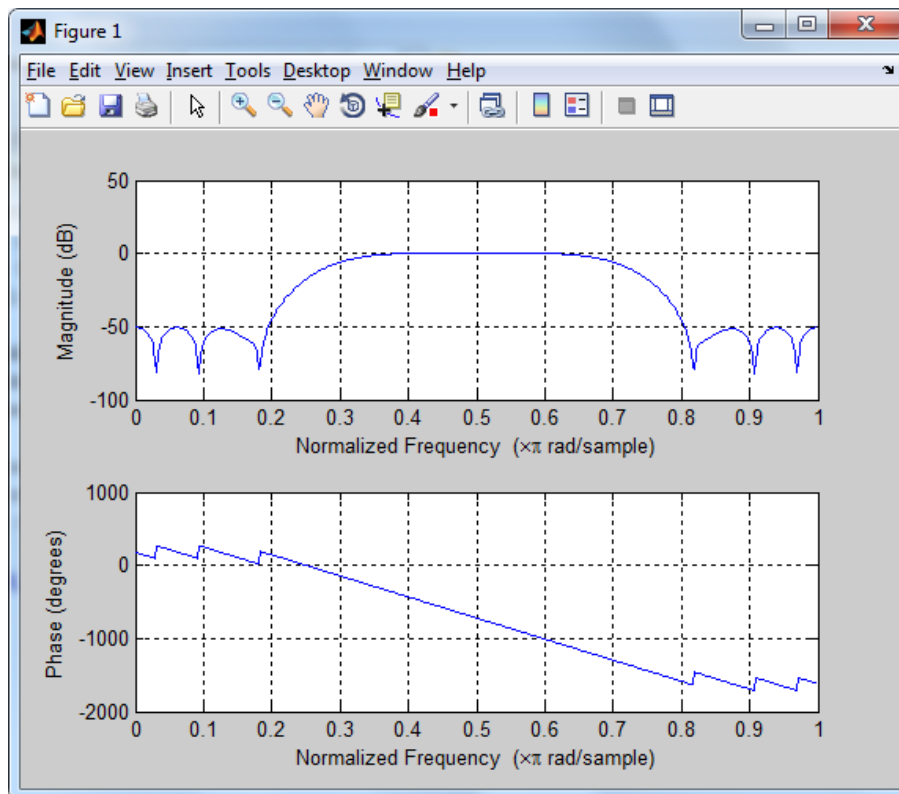


Рис. 2.4. АЧХ і ФЧХ СФ 32-го порядку

2.7. Проектування фільтрів нижніх частот із скінченною імпульсною характеристикою

Розглянемо приклад. Необхідно за допомогою методу зважування обчислити коефіцієнти СІХ-фільтра нижніх частот, який задовольняє таким специфікаціям:

гранична частота смуги пропускання	1,5 кГц;
ширина смуги переходу	0,5 кГц;
загасання в смузі заглушення	>50 дБ;
частота дискретизації	8 кГц.

Використовуючи табл. 2.1, виберемо ІХ $h_3[n]$ для ФНЧ:

$$h_3[n] = f_{\pi}^H \operatorname{sinc}(f_{\pi}^H \pi n).$$

Частота Найквіста $f_N = f_c / 2 = 8 / 2 = 4$ кГц. Нормована ширина смуги переходу $\Delta f = 0,5 / 4 = 0,125$. З табл. 2.2 видно, що вимозі до загасання в смузі заглушення задовольняють функції Хеммінга, Блекмана і Кайзера.

Розглянемо вікно Хеммінга. Тоді $N = 6,6 / \Delta f = 6,6 / 0,125 = 52,8$ (табл. 2.2), припускаємо, що $N = 53$. Тоді ІХ фільтра буде дорівнювати $h[n] = h_3[n-26]w[n]$, де $h_3[n-26] = f_{\Pi}^H \text{sinc}[f_{\Pi}^H \pi(n-26)]$ і $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n / 52)$ для $0 \leq n \leq 52$. Необхідно зазначити, що для отримання каузальної характеристики задану ІХ потрібно зсунути на $(N-1)/2 = 26$ відліків.

Внаслідок ефекту розмивання характеристики фільтра, що вводиться ваговою функцією, частота зрізу проєктованого фільтра буде відрізнятися від поданої в специфікації. Тому центр смуги переходу буде зміщений так $f_{\Pi}' = f_{\Pi} + \Delta f / 2 = 1,5 + 0,25 = 1,75$ кГц. Тоді нормована частота зрізу $f_{\Pi}^H = f_{\Pi}' / f_N = 1,75 / 4 = 0,4375$.

Оскільки ІХ – симетрична функція, то можна обчислити тільки половину значень для $0 \leq n \leq 26$, а інші отримати з умови симетрії.

Нижче наведено програму, за допомогою якої можна обчислити ІХ заданого СІХ-фільтра. У програмі з метою спрощення алгоритму умова симетрії для скорочення обсягу обчислень не використовується.

%Приклад №2.1

Fp=1.5; %гранична частота смуги пропускання

d=0.5; %ширина смуги переходу

Fc=8; %частота дискретизації

FN=Fc/2; %частота Найквіста

fp=(Fp+d/2)/FN; %середина частоти зрізу (нормована)

N=53; %кількість коефіцієнтів фільтра

n=0:N-1;

hp=fp*sinc(fp*(n-(N-1)/2)); %задана ІХ

w=0.54-0.46*cos(2*pi*n/(N-1)); %коефіцієнти вікна Хеммінга

h=hp.*w; %зважування заданої ІХ вікном Хеммінга

[H,f]=freqz(h,1,512,Fc); %частотна характеристика

mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі

subplot(2,1,1);

stem(n/Fc,h); %виведення ІХ

xlabel('Time (mseconds)'), ylabel('Amplitude')

subplot(2,1,2); plot(f,mag), grid on; %виведення АЧХ

xlabel('Frequency (kHz)'), ylabel('Magnitude (d)')

Отримана АЧХ (рис. 2.5) повністю задовольняє заданій специфікації фільтра.

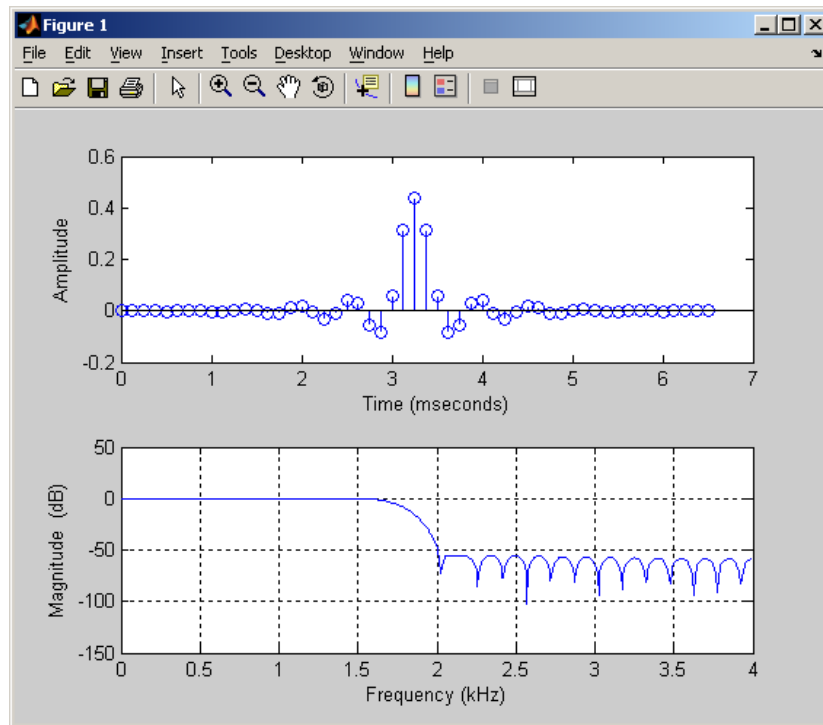


Рис. 2.5. ІХ і АЧХ низькочастотного СІХ-фільтра, отриманого методом зважування

Як було описано в підрозділі 2.6, у пакеті MATLAB є спеціальна функція для розрахування коефіцієнтів методом зважування. Нижче наведено текст програми, який дозволяє спроектувати заданий фільтр за допомогою функції **fir1**.

%Приклад №2.2

Fp=1.5; %гранична частота смуги пропускання

d=0.5; %ширина смуги переходу

Fc=8; %частота дискретизації

FN=Fc/2; %частота Найквіста

fp=(Fp+d/2)/FN; %середина частоти зрізу (нормована)

N=53; % кількість коефіцієнтів фільтра

n=0:N-1;

w=hamming(N); %коефіцієнти вікна Хеммінга

%ІХ з використанням вікна Хеммінга

h=fir1(N-1,fp,w,'noscale');

[H,f]=freqz(h,1,512,Fc); %частотна характеристика

```

%АЧХ у логарифмічному масштабі
mag=20*log10(abs(H));
subplot(2,1,1);
stem(n/Fc,h); % виведення ІХ
xlabel('Time (mseconds)'),
ylabel('Amplitude')
subplot(2,1,2);
plot(f,mag), grid on; % виведення АЧХ
xlabel('Frequency (kHz)'),
ylabel('Magnitude (d)')

```

Результати програми повністю збігаються з результатами програми «Приклад №2.1» (рис. 2.5).

Текст програми «Приклад № 2.2» можна ще спростити, якщо врахувати, що за замовчуванням функція **fir1** розраховує коефіцієнти фільтра з використанням вікна Хеммінга. Тому дві команди **w=hamming(N); h=fir1(N-1,fp,w,'noscale')** можна замінити однією **h=fir1(N-1,fp,'noscale')**.

Результати виконання команд будуть еквівалентними.

2.8. Проектування фільтра верхніх частот із скінченною імпульсною характеристикою

Розглянемо приклад проектування СІХ-фільтра верхніх частот, що задовольняє специфікації, яку наведено в прикладі підрозділу 2.2. Використовуючи табл. 2.1, виберемо ІХ $h_3[n]$ для фільтра верхніх частот

$$h_3[n] = \delta[n] - f_{\Pi}^H \operatorname{sinc}(f_{\Pi}^H \pi n).$$

Аналогічно попередньому прикладу візьмемо вікно Хеммінга, яке задовольняє вимозі до загасання в смузі заглушення (табл. 2.2). Тоді нормована ширина смуги переходу $\Delta f = 0,125$, порядок фільтра $N = 53$, нормована частота центра смуги переходу $f_{\Pi}^H = 0,4375$. Оскільки необхідно отримати каузальну ІХ, то задану ІХ потрібно зсунути на $(N-1)/2 = 26$ відліків. Отже, ІХ фільтра буде дорів-

нювати $h[n] = h_3[n - 26]w[n]$, де $h_3[n - 26] = \delta[n - 26] - f_{\Pi}^H \text{sinc} \times [f_{\Pi}^H \pi(n - 26)]$ й $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n / 52)$ для $0 \leq n \leq 52$.

Якщо порівняти ІХ ФВЧ і ФНЧ, то неважко помітити, що, знаючи коефіцієнти ФНЧ, легко отримати коефіцієнти ФВЧ. Виходячи із властивостей дельта-функції, для розрахунку ІХ ФВЧ розглянемо 2 випадки:

- 1) $h[n] = -h_{\text{ФНЧ}}[n]$ для $n \neq 26$;
- 2) $h[n] = 1 - h_{\text{ФНЧ}}[n]$ для $n = 26$.

Нижче наведений фрагмент програми для розрахування ІХ ФВЧ за ІХ ФНЧ:

```
h1=fir1(N-1,fp,'noscale'); %ІХ ФНЧ  
h=-h1; h((N-1)/2+1)=1-h1((N-1)/2+1);
```

Імпульсну характеристику ФВЧ також можна обчислити безпосередньо за допомогою функції **fir1**:

```
h=fir1(N-1,fp,'high','noscale');
```

Заміною відповідного рядка в тексті програми «Приклад №2.2» отримаємо ФВЧ із СІХ, зображений на рис. 2.6.

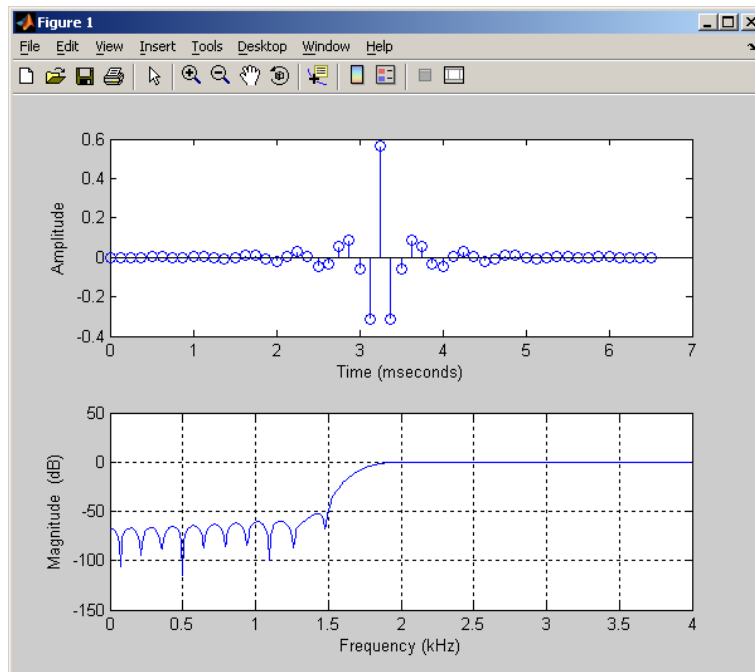


Рис. 2.6. ІХ і АЧХ високочастотного СІХ-фільтра, отриманого методом зважування

2.9. Проектування смугового фільтра із скінченною імпульсною характеристикою

Потрібно, щоб смуговий СІХ-фільтр задовольняв таким специфікаціям:

смуга пропускання	150–250 Гц;
ширина смуги переходу	50 Гц;
нерівномірність у смузі пропускання	0,1 дБ;
загасання в смузі заглушення	>60 дБ;
частота дискретизації	1 кГц.

Визначимо коефіцієнти і спектр фільтра, використовуючи метод зважування. Частота Найквіста $f_N = f_c / 2 = 1000 / 2 = 500$ Гц.

Згідно з виразами (2.1) і (2.2) знайдемо нерівномірність у смузі пропускання та загасання в смузі заглушення:

$$\begin{aligned} -20\lg \delta_s &= 60, \text{ звідки } \delta_s = 10^{-60/20} = 0,001; \\ 20\lg(1 + \delta_{\Pi}) &= 0,1, \text{ звідки } \delta_{\Pi} = 10^{0,1/20} - 1 = 0,0116. \end{aligned}$$

Отже, $\delta = \min(\delta_{\Pi}, \delta_s) = 0,001$. Вимоги до загасання можна задовольнити тільки при використанні функції Кайзера або Блекмана.

Для функції Кайзера згідно з (2.4) кількість коефіцієнтів дорівнює

$$N \geq \frac{60 - 7,95}{7,18(50 / 500)} = 72,49.$$

Отже, припускаємо, що $N = 73$. Згідно з виразом (2.3) параметр нерівномірності виражається так:

$$\alpha = 0,1102(60 - 8,7) = 5,65.$$

З урахуванням ширини смуги переходу нормовані нижня й верхня частоти зрізу відповідно рівні:

$$f_1^H = (f_1 - \Delta f / 2) / f_N = (150 - 25) / 500 = 0,25;$$

$$f_2^H = (f_2 + \Delta f / 2) / f_N = (250 + 25) / 500 = 0,55.$$

Нижче наведено текст програми, який дозволяє спроектувати заданий СФ за допомогою функції **fir1**.

%Приклад №2.3

```
F1=150; F2=250; %нижня і верхня частоти зрізу
d=50; %ширина смуги переходу
Fc=1000; %частота дискретизації
FN=Fc/2; %частота Найквіста
f1=(F1-d/2)/FN; %нормована нижня частота зрізу
f2=(F2+d/2)/FN; %нормована верхня частота зрізу
N=73; % кількість коефіцієнтів фільтра
n=0:(N-1);
w=kaiser(N,5.65); % коефіцієнти функції Кайзера
h=fir1(N-1,[f1 f2],w,'noscale'); %ІХ фільтра
[H,f]=freqz(h,1,512,Fc); %частотна характеристика
mag=20*log10(abs(H));
subplot(2,1,1);
stem(n/Fc,h); %виведення ІХ
xlabel('Time (mseconds)'),
ylabel('Amplitude')
subplot(2,1,2);
plot(f,mag), grid on; %виведення АЧХ
xlabel('Frequency (Hz)'),
ylabel('Magnitude (d)')
```

У результаті виконання програми (рис. 2.7) отримуємо СФ, що задовольняє заданій специфікації.

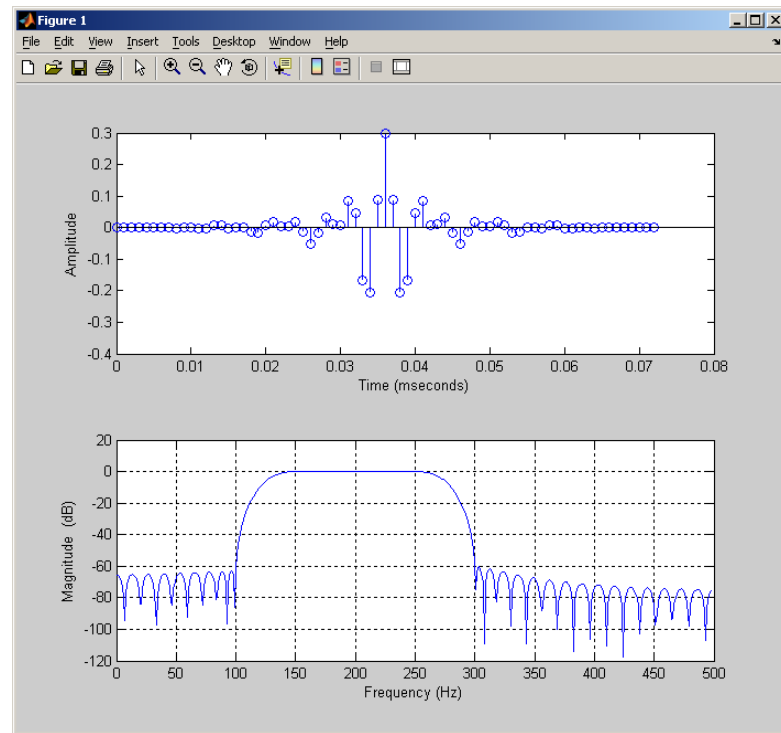


Рис. 2.7. ІХ і АЧХ смугового СІХ-фільтра,
отриманого методом зважування

2.10. Проектування режекторного фільтра із скінченною імпульсною характеристикою

Потрібно, щоб режекторний СІХ-фільтр задовольняв таким специфікаціям:

сму́га затримування	3,5–5,5 кГц;
ширина смуги переходу	500 Гц;
нерівномірність у смузі пропускання	0,5 дБ;
загасання в смузі заглушення	>40 дБ;
частота дискретизації	20 кГц;
порядок фільтра	мінімально можливий.

Визначимо коефіцієнти і спектр фільтра, використовуючи метод зважування. Частота Найквіста $f_N = f_c / 2 = 20 / 2 = 10$ кГц. Нормована ширина смуги переходу $\Delta f = 0,5 / 10 = 0,05$. Згідно з (2.1) і (2.2), знайдемо нерівномірність у смузі пропускання і загасання в смузі заглушення:

$$-20\lg \delta_s = 40, \text{ звідки } \delta_s = 10^{-40/20} = 0,01;$$

$$20\lg(1 + \delta_{\Pi}) = 0,5, \text{ звідки } \delta_{\Pi} = 10^{0,5/20} - 1 = 0,0593.$$

Отже, $\delta = \min(\delta_{\Pi}, \delta_s) = 0,01$. Вимоги до загасання можна задовольнити при використанні функцій Ханна, Хеммінга, Блекмана або Кайзера. Визначимо, при використанні якого вагового вікна порядок фільтра буде мінімальним. Очевидно, що серед функцій Ханна, Хеммінга й Блекмана мінімальний порядок фільтра може забезпечити вікно Ханна.

Для функції Ханна порядок фільтра $N = 6,2 / \Delta f = 6,2 / 0,05 = 124$ (табл. 2.2). Оскільки для задання РФ порядок фільтра $N - 1$ має бути величиною парною, то приймаємо кількість коефіцієнтів $N = 125$.

Для функції Кайзера згідно з (2.4) кількість коефіцієнтів дорівнює

$$N \geq \frac{40 - 7,95}{14,36 \cdot 0,05} = 89,28.$$

Отже, приймаємо $N = 91$. Очевидно, що при використанні вікна Кайзера порядок фільтра буде найменший, порівняно з використанням інших вікон.

Для функції Кайзера відповідно до виразу (2.3) параметр нерівномірності виражається так:

$$\alpha = 0,5842(40 - 21)^{0,4} + 0,07886(40 - 21) = 3,4.$$

З урахуванням ширини смуги переходу нормовані нижня й верхня частоти зрізу відповідно рівні:

$$f_1^H = (f_1 - \Delta f / 2) / f_N = (3,5 - 0,25) / 10 = 0,325;$$

$$f_2^H = (f_2 + \Delta f / 2) / f_N = (5,5 + 0,25) / 10 = 0,575.$$

Нижче наведено текст програми, який дозволяє спроектувати заданий РФ за допомогою функції **fir1**.

%Приклад №2.4

F1=3.5; F2=5.5; %нижня й верхня частоти зрізу

d=0.5; %ширина смуги переходу

Fc=20; %частота дискретизації

FN=Fc/2; %частота Найквіста

f1=(F1-d/2)/FN; %нормована нижня частота зрізу

f2=(F2+d/2)/FN; %нормована верхня частота зрізу

N=91; % кількість коефіцієнтів фільтра

n=0:(N-1);

w=kaiser(N,3.4); % обчислення коефіцієнтів функції Кайзера

h=fir1(N-1,[f1 f2],'stop',w,'noscale'); %ІХ фільтра

[H,f]=freqz(h,1,512,Fc); %частотна характеристика

mag=20*log10(abs(H));

subplot(2,1,1); stem(n/Fc,h); % виведення ІХ

xlabel('Time (mseconds)'), ylabel('Amplitude')

subplot(2,1,2); plot(f,mag), grid on; % виведення АЧХ

xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Magnitude (dB)')

В результаті виконання програми (рис. 2.8) отримуємо СФ, що задовольняє заданій специфікації.

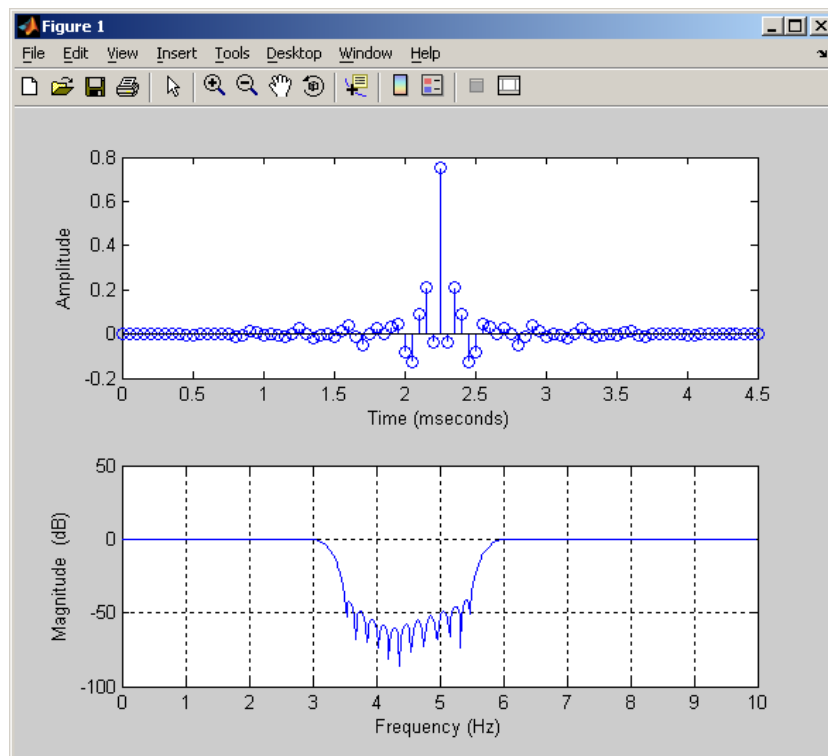


Рис. 2.8. ІХ і АЧХ режекторного СІХ-фільтра, отриманого методом зважування

Контрольні запитання

?

1. Що таке фільтр?
2. Які основні цілі фільтрації?
3. Які переваги цифрових фільтрів порівняно з аналоговими фільтрами?
4. Які недоліки цифрових фільтрів порівняно з аналоговими фільтрами?
5. З яких основних етапів складається проектування цифрових фільтрів?
6. Що включає в себе специфікація вимог?
7. Як виглядає схема допусків для частотно-вибіркових фільтрів?
8. Як задається фазова характеристика цифрових фільтрів?
9. У яких випадках не потрібно вказувати вимоги до ФЧХ?
10. Основна ідея методу зважування.
11. Яка частота має назву частота Найквіста?
12. Які фільтри належать до частотно-вибіркових фільтрів?
13. Ідеальні ІХ стандартних частотно-вибіркових фільтрів.
14. Чому не можна реалізувати ідеальні цифрові фільтри?
15. Що таке ефект Гіббса? З чим він пов'язаний?
16. Як зменшити вплив ефекту Гіббса?
17. Які фільтри називаються фільтрами зі скінченною імпульсною характеристикою?
18. Як розрахувати мінімальний порядок СІХ-фільтра?
19. Переваги та недоліки методу зважування.
20. Як впливає скінченна розрядність на цифрові СІХ-фільтри?
21. Як спроектувати СІХ-фільтр методом зважування в пакеті MATLAB?

3. ПРОЕКТУВАННЯ ФІЛЬТРІВ ІЗ НЕСКІНЧЕННОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ (НІХ-ФІЛЬТРІВ)

3.1. Основні характеристики рекурсивних фільтрів

Цифрові НІХ-фільтри характеризуються таким рекурсивним різницеvim рівнянням [5]:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^N b_m x[n-m] - \sum_{m=0}^M a_m y[n-m], \quad (3.1)$$

де $h[m]$ – імпульсна характеристика фільтра, тривалість якої теоретично нескінченна; a_m , b_m – коефіцієнти фільтра; $x[n]$, $y[n]$ – вхід і вихід фільтра.

Передавальна функція (ПФ) НІХ-фільтра має такий вигляд:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}}. \quad (3.2)$$

Необхідно зазначити, що в (3.2) коефіцієнт $a_0 = 1$. Якщо ця умова не виконується, то чисельник і знаменник необхідно розділити на a_0 .

Нагадаємо, що частотні характеристики цифрових фільтрів є періодичними функціями. При цьому період повторення дорівнює частоті дискретизації ω_c . Тому при проектуванні цифрових фільтрів частотні характеристики потрібно нормувати за віссю частот до частоти дискретизації

$$\omega = \frac{\omega_p}{\omega_c},$$

де ω – нормована частота.

Передавальну функцію НІХ-фільтра (3.2) можна подати у вигляді

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)} = K \frac{\prod_{k=1}^N (z - z_k)}{\prod_{k=1}^M (z - p_k)}, \quad (3.3)$$

де K – коефіцієнт передачі (підсилення) вхідного сигналу; z_k – нулі функції $H(z)$; p_k – полюси функції $H(z)$.

Графік полюсів і нулів передавальної функції називається діаграмою нулів та полюсів і є зручним способом подання й аналізу фільтрів на комплексній площині. Щоб фільтр був стійким, усі його полюси повинні знаходитись усередині одиничного кола (або збігатися з нулями на одиничному колі). На положення нулів обмежень не існує.

Здебільше кількість нулів N не перевищує кількість полюсів M (тобто $N \leq M$). Системи, що задовольняють цій умові, називають системами M -го порядку. При $N > M$ порядок системи стає невизначеним. У цьому випадку можна вважати, що передавальна функція $H(z)$ відповідає послідовному з'єднанню системи M -го порядку і СІХ-фільтра $(N - M)$ -го порядку. В цьому посібнику при розгляді всіх методів розрахунку фільтрів передбачається, що $N \leq M$.

При проходженні сигналу через фільтр модифікації зазнає зміни амплітуда і/або фаза даного сигналу. Природа і величина змін сигналу залежить від АЧХ і ФЧХ фільтра. Мірою модифікації фазової характеристики сигналу є фазова або групова затримка фільтра.

Фазова затримка фільтра – це величина часової затримки, якої зазнає кожний частотний компонент сигналу при проходженні через фільтр. Фазова затримка визначається за виразом

$$T_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}. \quad (3.4)$$

Групова затримка фільтра – це середня часова затримка складеного сигналу, яка визначається за виразом

$$T_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}. \quad (3.5)$$

Рекурсивні фільтри за визначенням мають нелінійну ФЧХ. Фільтри з нелінійною ФЧХ будуть спотворювати фазу сигналу, який проходить через цей фільтр. Це пояснюється тим, що частотні компоненти сигналу будуть затримуватися на величину, непропорційну частоті, порушуючи таким чином їх гармонічний зв'язок. Тому при проектуванні НІХ-фільтрів необхідно оцінювати фазову і групову затримки.

Проектування НІХ-фільтрів включає ті самі 5 етапів, що й для СІХ-фільтрів, які було розглянуто в попередньому розділі.

Фактично розв'язання задачі синтезу НІХ-фільтрів зводиться до знаходження коефіцієнтів b_m і a_m у виразі (3.2). Існують *прямі* і *непрямі* методи синтезу рекурсивних фільтрів. Прямі методи засновані на безпосередньому визначенні параметрів НІХ-фільтра за заданими часовими і частотними характеристиками. Непрямі методи синтезу НІХ-фільтрів засновані на дискретизації аналогового фільтра-прототипу, що задовольняє заданим вимогам [2, 9].

При розрахунку цифрових фільтрів верхніх частот, смугових і режекторних, використовуються два підходи, подані на рис. 3.1

У першому випадку нормалізований аналоговий фільтр попередньо перетворюється в інший аналоговий фільтр, з якого шляхом дискретизації розраховується фільтр із заданими характеристиками. У другому випадку нормалізований фільтр нижніх частот зазнає дискретизації відразу ж, а потім перетворенням його смуги частот формується цифровий фільтр із заданими характеристиками.

Метод 1



Метод 2



Рис. 3.1. Схеми розрахунку ЦФ за аналоговими прототипами

Як аналогові фільтри-прототипи найчастіше використовуються фільтри Баттерворта, Чебишева (1 і 2 типів) і еліптичні (Кауера) і Бесселя, які будуть розглянуті нижче.

3.2. Специфікація частотної характеристики НІХ-фільтра

Специфікацію вимог при проектуванні ЦФ було докладно розглянуто в попередньому розділі.

Розглянемо схему допусків, що застосовується в специфікації частотної характеристики НІХ-фільтра. Приклад подібної схеми для цифрових фільтрів нижніх частот наведено на рис. 3.2.

При проектуванні фільтрів задаються межі смуг пропускання ω_p та заглушення ω_s , загасання в смузі заглушення δ_s , коефіцієнт передачі в смузі пропускання (зазвичай рівний 1), допуск на відхилення АЧХ від бажаного вигляду в смузі пропускання δ_p [5].

Граничні частоти іноді нормують до частоти дискретизації ω/ω_c . Але частіше в специфікації використовуються стандартні одиниці частоти, тобто Гц або кГц. Відхилення в смузі пропускання визначають нерівномірність у смузі пропускання, а відхилення в смузі заглушення – загасання в смузі заглушення.

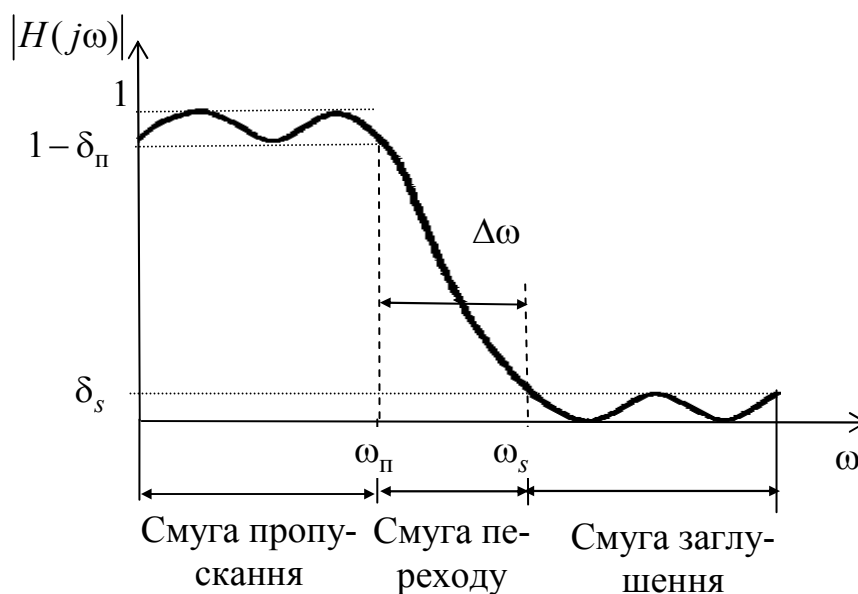


Рис. 3.2. Схема допусків для фільтра нижніх частот

Відхилення в смузі пропускання і смузі заглушення можуть виражатися як звичайними числами, так і в децибелах. Отже, загасання в смузі заглушення A_s і нерівномірність у смузі пропускання A_{Π} в децибелах для НІХ-фільтрів записуються так:

$$A_s = -20 \lg \delta_s; \quad (3.6)$$

$$A_{\Pi} = -20 \lg(1 - \delta_{\Pi}). \quad (3.7)$$

Для НІХ-фільтрів нерівномірність у смузі пропускання – це різниця між мінімальним і максимальним відхиленням у смузі пропускання. Для СІХ-фільтрів нерівномірність у смузі пропускання – це різниця між ідеальною характеристикою і максимальним (або мінімальним) відхиленням у смузі пропускання.

Отже, для НІХ-фільтрів нерівномірність у смузі пропускання фактично означає подвоєну амплітуду відхилення характеристики в смузі пропускання.

При специфікації фазової характеристики цифрових фільтрів у багатьох випадках достатньо вказати, що фазове спотворення суттєве або що бажана лінійна фазова характеристика.

У той же час, у деяких застосуваннях, де фільтри використовуються для вирівнювання або компенсації фазової характеристики системи або як фазообертачі, фазову характеристику потрібно задавати.

3.3. Аналогові фільтри-прототипи

Наведемо розрахункові формули для декількох стандартних типів аналогових фільтрів. Припустимо, потрібно розрахувати аналоговий фільтр нижніх частот із частотою зрізу $\omega_{\Pi}^a = 1$ рад/с (верхній індекс позначає, що частота задана для аналогового фільтра). Як апроксимована функція буде використовуватися квадрат амплітудної характеристики (винятком є фільтр Бесселя).

Будемо вважати, що передавальна функція аналогового фільтра є раціональною функцією змінної p такого вигляду:

$$H(p) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m p^m}{1 + \sum_{m=1}^M a_m p^m}. \quad (3.8)$$

де $p = \sigma + j\omega$ – комплексна змінна; a_m , b_m – коефіцієнти фільтра.

3.3.1. Фільтри Баттерворта

Фільтри Баттерворта нижніх частот характеризуються тим, що мають максимально гладку амплітудну характеристику на початку координат в p -площині. Квадрат амплітудної характеристики нормованого (тобто має частоту зрізу $\omega_{\Pi}^a = 1$ рад/с) фільтра Баттерворта дорівнює

$$|H(j\omega^a)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega^a)^{2N}},$$

де N – порядок фільтра.

Передавальна функція $H(p)$ нормованого ФНЧ N -го порядку описується таким виразом:

$$H(p) = \frac{1}{N(p)} = \frac{1}{\prod_{m=1}^N (p - p_m)}, \quad (3.9)$$

де $N(p)$ – поліном Баттерворта N -го порядку; $p_m = e^{j\pi[1/2+(2m-1)/2n]}$ – полюси передавальної функції $H(p)$ [2, 6, 8].

Порядок фільтра при заданих значеннях A_s і A_{Π} обчислюється так:

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0,1A_s} - 1}{10^{0,1A_{\Pi}} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\omega_s^a}{\omega_{\Pi}^a}\right)}. \quad (3.10)$$

Сформулюємо кілька властивостей фільтрів Баттерворта нижніх частот.

1. Фільтри Баттерворта мають тільки полюси (усі нулі передавальних функцій цих фільтрів розташовані на нескінченності).

2. На частоті $\omega^a = 1$ рад/с коефіцієнт передачі фільтра дорівнює $1/\sqrt{2}$ (тобто на частоті зрізу його амплітудна характеристика знижується на 3 дБ).

3. Порядок фільтра N повністю визначає весь фільтр.

3.3.2. Фільтри Чебишева

Відмітною рисою фільтрів Чебишева є найменша величина максимальної помилки апроксимації в заданій смузі частот. У дійсності помилка апроксимації подається в заданій смузі частот рівновеликими пульсаціями, тобто вона флюктує між максимумами та мінімумами рівної величини. Залежно від того, де мінімізується помилка апроксимації – у смузі пропускання або в смузі непропускання, розрізняють фільтри Чебишева типу 1 і 2 [2, 6, 8].

Фільтри Чебишева типу 1 мають тільки полюси і забезпечують рівновеликі пульсації амплітудної характеристики в смузі пропускання і монотонну зміну ослаблення в смузі заглушення. Квадрат амплітудної характеристики фільтра Чебишева типу 1 N -го порядку описується виразом

$$\left| H_1(j\omega^a) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega^a)},$$

де ε – постійний коефіцієнт, що визначає амплітуду пульсацій АЧХ у смузі пропускання; $T_N(\omega^a)$ – поліном Чебишева N -го порядку.

Згадаємо, що

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cos(x) &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Аналітичне подання поліномів Чебишева за всіма значеннями ω^a має вигляд

$$T_N(\omega^a) = \begin{cases} \cos[N \arccos \omega^a], & |\omega^a| \leq 1, \\ \operatorname{ch}[N \operatorname{arcch} \omega^a], & |\omega^a| > 1. \end{cases}$$

Поліноми Чебишева забезпечують рівнохвильові пульсації АЧХ у смузі пропускання і більш різкий спад її за граничною частотою, ніж поліноми Баттерворта.

Значення параметра ε і нерівномірність у смузі пропускання A_{Π} в децибелах пов'язані так:

$$A_{\Pi} = 20 \lg(\sqrt{1 + \varepsilon^2}) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2).$$

Отже, коефіцієнт пульсації ε при заданому значенні A_{Π} визначається за виразом

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_{\Pi}} - 1}.$$

Передавальна функція ФНЧ Чебишева аналогічно до передавальної функції Баттерворта описується співвідношенням (3.9), але полюси p_m розраховуються за такими виразами:

$$p_m = \operatorname{sh}(\beta) \sin(\alpha_m) + j \operatorname{ch}(\beta) \cos(\alpha_m),$$

де

$$\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2N}, \quad \beta = \frac{1}{N} \operatorname{arsh}(1/\varepsilon).$$

Порядок фільтра визначається зі співвідношення

$$N \geq \frac{\operatorname{arcch} \left(\sqrt{\frac{10^{0,1A_s} - 1}{10^{0,1A_{\Pi}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcch} \left(\frac{\omega_s^a}{\omega_{\Pi}^a} \right)}. \quad (3.11)$$

Властивість оптимальності фільтрів Чебишева типу 1 порядку N полягає в тому, що не існує якого-небудь іншого фільтра N -го порядку, що містить тільки полюси, який мав би такі ж або кращі характеристики й у смузі пропускання, й у смузі заглушення.

Фільтри Чебишева типу 2 (іноді їх називають зворотними фільтрами Чебишева) забезпечують монотонну зміну ослаблення в смузі пропускання і рівновеликі пульсації в смузі заглушення.

Передавальна функція фільтра Чебишева типу 2 $H_2(p)$ пов'язана з передавальною функцією фільтра Чебишева типу 1 $H_1(p)$ так:

$$H_2(p) = 1 - H_1(1/p).$$

Отже, квадрат амплітудної характеристики фільтрів Чебишева типу 2 порядку N можна подати так:

$$\left| H_2(j\omega^a) \right|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_s / \omega^a)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_s / \omega^a)},$$

де ω_s – щонайнижча частота, на якій у смузі заглушення досягається заданий рівень ослаблення.

Коефіцієнт пульсації дорівнює $\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_s} - 1}$.

Полюси ПФ фільтрів-прототипів Чебишева типів 1 і 2 (p_{1m} і p_{2m} відповідно) пов'язані один з одним співвідношенням $p_{2m} = 1/p_{1m}$. Нулі фільтрів цього типу розташовуються на уявній вісі в p -площині, а полюси – у лівій півплощині.

Порядок фільтра Чебишева типу 2 обчислюється за виразом (3.11).

Цифрові фільтри, засновані на функціях Чебишева, мають більш круту перехідну смугу, ніж фільтри Баттерворта, але нелінійність їх ФЧХ вища від нелінійності ФЧХ фільтрів Баттерворта.

3.3.3. Еліптичні фільтри

Еліптичні фільтри (фільтри Кауера) в деякому розумінні об'єднують у собі властивості фільтрів Чебишева типів 1 і 2, тому що АЧХ має рівновеликі пульсації і у смузі пропускання, і в смузі заглушення. За рахунок цього вдається забезпечити максимально можливу (при фіксованому порядку фільтра) крутість ската АЧХ, тобто перехідної зони між смугами пропускання і заглушення. Таким чином, еліптичні фільтри є оптимальними з точки зору мінімальної ширини перехідної смуги [2, 6, 8].

Квадрат амплітудної характеристики еліптичного фільтра нижніх частот записується у вигляді

$$\left| H(j\omega^a) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2(\omega^a, L)},$$

де $R_N(\dots)$ – раціональна функція Чебишева N -го порядку; ε, L – параметри, що характеризують пульсації в смугах пропускання і заглушення.

На відміну від фільтрів Баттерворта і Чебишева, простого виразу для полюсів еліптичного фільтра не існує, замість цього є процедури обчислення положення полюсів. Нулі еліптичного ФНЧ цілком уявні.

Еліптична характеристика дає найбільш ефективні фільтри з точки зору амплітудної характеристики. Вона дозволяє отримувати фільтри найменшого порядку при цьому наборі специфікацій, тобто для даного порядку N еліптичні фільтри мають АЧХ із самим крутим із теоретично можливих спуском до смуги заглушення. Тому, в першу чергу, при роз-робці НІХ-фільтрів потрібно пробувати саме еліптичну характеристику. Виключення становлять ті випадки, коли важлива фазова характеристика. У цьому випадку варто використувати фільтр-прототип Баттерворта. Еліптичні фільтри мають найгіршу форму ФЧХ порівняно з фільтрами на основі інших популярних функцій.

3.3.4. Фільтри Бесселя

Особливістю фільтрів Баттерворта і Чебишева є те, що спектральні складові вхідного сигналу при проходженні через них зазнають різної часової затримки. Зміна часу затримки усередині смуги пропускання фільтра називається спотворенням, обумовленим затримкою сигналу. Таке спотворення збільшується зі зростанням порядку фільтра і рівня пульсацій. Якщо вхідний сигнал не синусоїда, а подібно до імпульсів або модульованої несучої містить коливання із кратними частотами, то через різну часову затримку цих коливань фільтром форма вихідного сигналу спотворюється [2].

Існують фільтри, які усередині смуги пропускання забезпечують постійну затримку для всіх спектральних складових сигналу. Однак у цьому випадку характер зміни загасання в ділянці частоти зрізу АЧХ сильно відрізняється від форми АЧХ фільтрів Чебишева і Баттерворта.

Загасання змінюється трохи повільніше, ніж в інших типів фільтрів. Такі пристрої називаються фільтрами Бесселя. Вони застосовуються передусім у тих випадках, коли важливіше передати сигнал без спотворень, ніж визначити характер внесеного загасання.

Передавальна функція фільтрів Бесселя записується у вигляді

$$H(p) = \frac{d_0}{B_N(p)},$$

де $B_N(p)$ – функція Бесселя N -го порядку; $d_0 = (2N)! / 2^N N!$ – константа нормування.

Функції Бесселя задовольняють такому рекурентному співвідношенню:

$$B_N(p) = (2N - 1)B_{N-1}(p) + p^2 B_{N-2}(p)$$

з початковими умовами $B_0(p) = 1$ й $B_1(p) = p + 1$.

Фільтри Бесселя мають тільки полюси, які розташовані на окружності із центром на дійсній позитивній півосі p -площини.

Фільтри Бесселя мають майже постійну групову затримку. Необхідно пам'ятати, що в таких фільтрів при перетворенні ФНЧ у ФВЧ, СФ або РФ постійність часу затримки усередині смуги пропускання не зберігається. Фільтри Бесселя мають найменшу крутість характеристики, у той же час вони не мають пульсацій АЧХ ні в смузі пропускання, ні в смузі заглушення.

Перехідна характеристика фільтрів Бесселя має досить малий викид. Однак при дискретизації безперервних фільтрів Бесселя методами, розглянутими далі, характерна для цих фільтрів властивість максимальної гладкості характеристики групової затримки не зберігається.

3.4. Перетворення смуги частот для аналогових фільтрів

Існує багато різних методів перетворення фільтрів нижніх частот із частотою зрізу, яка дорівнює 1 рад/с, в інший фільтр нижніх частот (який має іншу частоту зрізу), а також у фільтр верхніх частот, смуговий або режекторний. Перерахуємо найбільш прості перетворення.

1) ФНЧ \rightarrow ФНЧ із частотою зрізу ω_{Π}

$$p \rightarrow \frac{p}{\omega_{\Pi}}.$$

2) ФНЧ \rightarrow ФВЧ із частотою зрізу ω_{Π}

$$p \rightarrow \frac{\omega_{\Pi}}{p}.$$

2) ФНЧ \rightarrow СФ із смугою пропускання $[\omega_1; \omega_2]$

$$p \rightarrow \frac{p^2 + \omega_1 \omega_2}{p(\omega_2 - \omega_1)}.$$

3) ФНЧ \rightarrow РФ із смугою заглушення $[\omega_1; \omega_2]$

$$p \rightarrow \frac{p(\omega_2 - \omega_1)}{p^2 + \omega_1 \omega_2}.$$

3.5. Методи дискретизації аналогового фільтра

Припустимо, що передавальна функція аналогового фільтра (що являє собою перетворення Лапласа від імпульсної характеристики) дорівнює:

$$H(p) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m p^m}{\sum_{m=0}^M a_m p^m} = \frac{\prod_{m=1}^N (p - z_m)}{\prod_{m=1}^M (p - p_m)}, \quad (3.12)$$

де $p = \sigma + j\omega$ – комплексна змінна; a_m , b_m – коефіцієнти фільтра; z_k , p_k – нулі й полюси функції $H(p)$.

Найбільш поширеними методами дискретизації аналогових фільтрів є такі методи:

- метод інваріантного перетворення ІХ;
- метод погодженого z -перетворення;
- метод відображення диференціалів;
- метод білінійного перетворення.

3.5.1. Метод інваріантного перетворення ІХ

Відмітною рисою цього методу є те, що як ІХ, яку розраховує ЦФ, використовується ІХ відповідного аналогового фільтра, що зазнає дискретизації. Іншими словами, у цьому методі за допомогою перетворення Лапласа з підходящої аналогової передавальної функції $H(p)$ отримують імпульсну характеристику $h(t)$. Потім $h(t)$ зазнає дискретизації. За отриманою функцією $h[nT_c]$ (де T_c – інтервал дискретизації) за допомогою z -перетворення розраховується бажана передавальна функція $H(z)$ ЦФ [2, 5–7].

Розкладемо вираз (3.12) на прості дроби

$$H(p) = \sum_{m=1}^M \frac{c_m}{p - p_m}, \quad (3.13)$$

де $c_m = H(p)(p - p_m)|_{p=p_m}$.

При запису розкладу (3.13) передбачалося, що $N < M$ і всі полюси $H(p)$ прості. ІХ $h(t)$ аналогового фільтра з передавальною функцією вигляду (3.13) описується співвідношенням

$$h(t) = \sum_{m=1}^M c_m e^{p_m t}.$$

Виконавши дискретизацію $h(t)$, отримаємо ІХ цифрового фільтра

$$h[n] = \sum_{m=1}^M c_m e^{p_m n T_c},$$

де T_c – період дискретизації.

Знайдемо z -перетворення функції $h[n]$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M c_m e^{p_m n T_c} z^{-n}.$$

Змінімо порядок підсумовування і підсумуємо за n

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{m=1}^M c_m \sum_{n=0}^{\infty} e^{p_m n T_c} z^{-n} = \sum_{m=1}^M c_m \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_m T_c} z^{-1})^n = \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{c_m}{1 - e^{p_m T_c} z^{-1}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Порівняємо формули (3.13) і (3.14). Видно, що для простих полюсів перехід від $H(p)$ до $H(z)$ здійснюється за допомогою відображення, при якому використовується заміна

$$\frac{1}{p - p_m} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{p_m T_c} z^{-1}}. \quad (3.15)$$

Оскільки у виразі (3.14) ПФ $H(z)$ записана у вигляді суми найпростіших дробів, то необхідно звести функцію до спільного знаменника так, щоб отримати ПФ вигляду (3.2). У цьому випадку легко перейти до різницевого рівняння (3.1), яке описує алгоритм функціонування ЦФ. Якщо використовується не нормована, а реальна частота дискретизації, то результуючу ПФ необхідно помножити на T_c .

Висновки:

1. ІХ дискретного фільтра $h[nT_c]$ ідентична характеристиці аналогового фільтра $h(t)$ в дискретні моменти часу $t = nT_c$, $n = 0, 1, \dots$. Саме з цієї причини метод набув своєї назви.

Тому перевага цього методу полягає в збереженні в цифровому фільтрі такої ж фазової характеристики і характеристики загасання, як і у початкового аналогового фільтра.

2. Оскільки виконується дискретизація безперервної ІХ аналогового фільтра, то, як і для систем дискретного часу, спектр, відповідний передавальній функції $H(z)$, аналогічний спектру аналогового фільтра $H(p)$, але повторюється з періодом, рівним частоті дискретизації. Таким чином, відбувається накладення спектрів (рис. 3.3).

Тому на частотну характеристику дискретного фільтра впливає частота дискретизації. Щоб частотна характеристика була ближче до характеристик еквівалентного аналогового фільтра, необхідна досить велика частота дискретизації. Метод інваріантного перетворення ІХ

дає корисні НІХ-фільтри, якщо частота дискретизації набагато перевищує ширину спектра сигналів, що фільтруються.

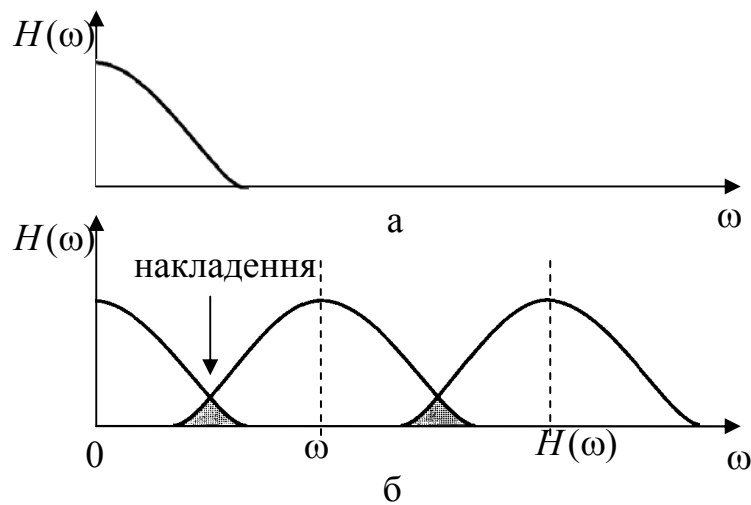


Рис. 3.3. Амплітудний спектр: а – аналоговий фільтр; б – еквівалентний цифровий фільтр (ефект накладення)

3. Через зазначені вище причини метод можна використовувати для ФНЧ із дуже різкими зрізами і незначним накладенням, тому що за таких умов частота дискретизації виправдано велика.

Метод не підходить для ФВЧ або режекторних фільтрів, якщо додатково не використовувати фільтр захисту від накладення спектрів.

4. Ще одним недоліком методу є те, що стійкий аналоговий фільтр не завжди відображається в стійкий цифровий фільтр.

3.5.2. Методи узгодженого z -перетворення

Метод узгодженого z -перетворення заснований на безпосередньому відображенні полюсів і нулів із p -площини в полюси і нулі на z -площині [5]. При такому відображенні полюс (або нуль) у точці $p = a$ площини p відображається в полюс (або нуль) у точці $z = e^{aT_c}$ площини z , де T_c – період дискретизації. Таким чином, відображаюча заміна має вигляд

$$(p - a) \rightarrow (1 - e^{aT_c} z^{-1}). \quad (3.16)$$

Для аналогових фільтрів високих порядків передавальна функція має кілька полюсів і/або нулів, які потрібно відобразити з p - на

z -площину. У загальному вигляді для аналогового фільтра з передавальною функцією вигляду (4.12) відображаюча заміна для кожного полюса і нуля має вигляд

$$\begin{aligned}(p - p_k) &\rightarrow (1 - e^{p_k T_c} z^{-1}), \\(p - z_k) &\rightarrow (1 - e z^{z_k T_c} z^{-1}).\end{aligned}$$

Необхідно відзначити, що полюси цифрового фільтра, що розраховується методом погодженого z -перетворення, виявляються ідентичними полюсам, що отримуються за допомогою методу інваріантного перетворення IX, однак нулі істотно розрізняються.

Висновки:

1. Для використання методу необхідно знати положення полюсів і нулів аналогового фільтра. Для цього необхідно розкласти на множники чисельник і знаменник передавальної функції $H(p)$.

2. Метод узгодженого z -перетворення і метод інваріантного перетворення IX дають ЦФ із ідентичними знаменниками.

3. У цифрових фільтрах корисна смуга частот знаходиться у діапазоні від 0 до частоти Найквіста (половини частоти дискретизації), а в аналогових фільтрах фігурують частоти від 0 до ∞ . Отже, відображення, яке виробляє узгоджене z -перетворення, стискає нескінченну аналогову смугу частот у скінченну. Це призводить до спотворення частотних характеристик еквівалентних ЦФ порівняно з аналоговими. Для таких ЦФ характерно менше загасання порівняно з аналоговими фільтрами.

4. Якщо аналоговий фільтр має полюси на частотах, близьких до частоти Найквіста, або нулі на частотах, що перевищують її, частотна характеристика цифрового фільтра буде спотворена в результаті накладення. При цьому характеристика аналогового фільтра, яка припадає на діапазон за частотою Найквіста, істотна.

5. Погоджене z -перетворення також не підходить у випадку, коли передавальна функція аналогового фільтра має тільки полюси. У цьому випадку передавальна функція цифрового фільтра також буде мати тільки полюси, але в багатьох випадках вона не буде відповідати початковому аналоговому фільтру. Вважається, що трохи кращі результати можна отримати, якщо штучно ввести в цифровий фільтр нулі в точці $z = -1$ (тобто на частоті Найквіста).

3.5.3. Методи відображення диференціалів

Метод відображення диференціалів дозволяє отримувати дискретні передавальні функції систем за заданими передавальними функціями аналогових систем у вигляді (3.12). При цьому кожний оператор диференціювання p у ПФ (3.12) замінюється дискретним еквівалентом

$$p \rightarrow \frac{d}{dt} \approx \frac{\Delta}{T_c} \rightarrow \frac{H_{\Delta}(z)}{T_c},$$

де Δ – різницевий оператор, що виражає приріст дискретного сигналу $x[n]$, який відповідає безперервному сигналу $x(t)$ на вході диференціюючої ланки за один крок дискретизації T_c ; $H_{\Delta}(z)$ – передавальна функція різницевого оператора Δ [7, 9, 10].

Безперервна диференціююча ланка може бути апроксимована дискретною диференціюючою ланкою декількома способами. Існує безліч z -форм, які відрізняються за точністю і складністю.

При виведенні z -форм зручно розв'язувати задачу дискретної апроксимації не диференціюючого оператора p , а інтегруючої ланки $1/p$ та її дискретного еквівалента $\frac{T_c}{H_{\Delta}(z)}$ (рис. 3.4), що дозволяє

звести задачу до одного з методів числового інтегрування і знаходження відповідної передавальної функції дискретного інтегратора.

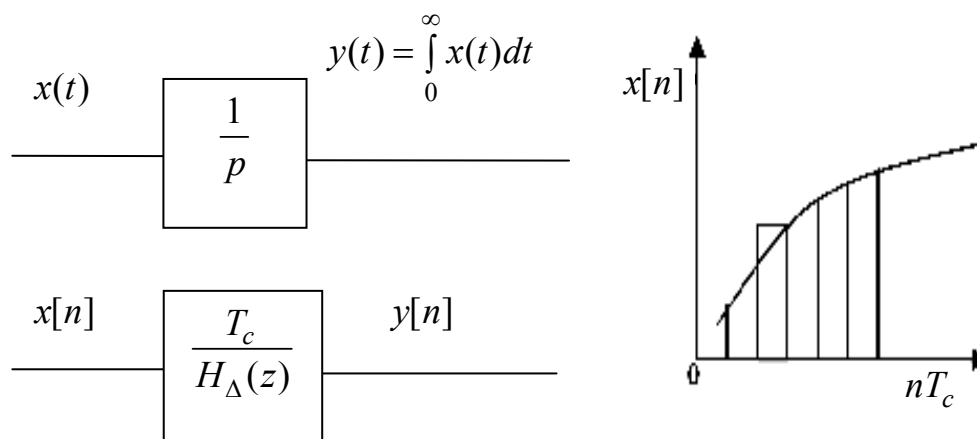


Рис. 3.4. Дискретна апроксимація інтегруючої ланки

Розглянемо інтегрування сигналу за методом прямокутників. Приріст сигналу на виході інтегратора за крок дискретизації дорівнює добутку вхідного відліку на крок дискретизації, таким чином, різницеве рівняння має вигляд

$$y[n] = y[n-1] + x[n]T_c.$$

Знайдемо z -перетворення різницевого рівняння

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + X(z)T_c.$$

Таким чином, ПФ еквівалентної інтегруючої ланки має вигляд

$$H(z) = \frac{T_c}{1 - z^{-1}}; \quad H_{\Delta}(z) = 1 - z^{-1}.$$

Це означає, що для апроксимації першого порядку передавальної функції аналогового фільтра (3.12) необхідно виконати підстановку

$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_c}.$$

Після цього оцінюють спотворення частотних характеристик дискретного фільтра порівняно з початковим аналоговим фільтром-прототипом, які виникають через накладення частот при дискретизації.

Використовуючи більш точні методи числового інтегрування, можна отримати z -форми різних порядків. За аналогією, використовуючи метод трапецій, знайдемо більш точну z -форму. Різницеве рівняння за методом трапецій має вигляд

$$y[n] = y[n-1] + T_c \frac{x[n] + x[n-1]}{2}.$$

Знайдемо z -перетворення різницевого рівняння

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + \frac{T_c}{2}(X(z) + X(z)z^{-1}).$$

Таким чином, z -форма другого порядку має вигляд

$$H^2(z) = \frac{T_c}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}; \quad H_{\Delta}(z) = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}};$$

$$p \rightarrow \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_c} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (3.17)$$

Висновки:

1. Перевага цього методу в тому, що z -перетворення ІХ ЦФ елементарно утворюється із перетворення Лапласа ІХ аналогового фільтра за допомогою простої алгебраїчної підстановки.

2. Методи відображення диференціалів дозволяють за передавальною характеристикою безперервного фільтра побудувати цифровий фільтр. При цьому абсолютно точного збігу частотних характеристик безперервного і цифрового фільтрів добитися неможливо, найкращі результати досягаються при використанні білінійного перетворення.

3. При прямуванні до нуля періоду дискретизації частотна характеристика цифрового фільтра прямує до частотної характеристики безперервного фільтра.

3.5.4. Метод білінійного перетворення

Вираз (3.17) називається білінійним перетворенням. Метод білінійного перетворення – один із найпростіших і зручних непрямих методів синтезу НІХ-фільтрів. Розглянемо трансформацію частотних характеристик при білінійному перетворенні [2, 5, 8–10]. Підставимо в (3.17) $z = e^{j\omega T_c}$:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_c} \frac{1 - e^{-j\omega T_c}}{1 + e^{-j\omega T_c}} = \frac{2}{T_c} \frac{e^{-j\omega T_c/2} (e^{j\omega T_c/2} - e^{-j\omega T_c/2})}{e^{-j\omega T_c/2} (e^{j\omega T_c/2} + e^{-j\omega T_c/2})} = \\ &= j \frac{2 \sin(\omega T_c / 2)}{T_c \cos(\omega T_c / 2)} = j \frac{2}{T_c} \operatorname{tg} \frac{\omega T_c}{2}. \end{aligned}$$

Позначимо шкалу частот у p -площині через індекс ω_d (деформована) і, вважаючи $p = j\omega_d$, отримуємо:

$$\omega_d = \frac{2}{T_c} \operatorname{tg} \frac{\omega T_c}{2}, \quad -\pi / T_c < \omega < \pi / T_c. \quad (3.18)$$

Виразимо z з виразу (2.11):

$$T_c p / 2z + T_c p / 2 = z - 1; \quad 1 + T_c p / 2 = z(1 - T_c p / 2);$$

$$z = \frac{1 + T_c p / 2}{1 - T_c p / 2}.$$

Підставимо в отриманий вираз $p = j\omega_d$:

$$z = \frac{1 + jT_c\omega_d / 2}{1 - jT_c\omega_d / 2} = \sqrt{\frac{1 + (T_c\omega_d / 2)^2}{1 + (T_c\omega_d / 2)^2}} e^{j\left[\arctg\frac{T_c\omega_d}{2} - \arctg\left(-\frac{T_c\omega_d}{2}\right)\right]} = e^{j2\arctg\frac{T_c\omega_d}{2}} = e^{j\omega T_c}.$$

Таким чином, при білінійному перетворенні (3.17) кожній точці комплексної p -площини відповідає певна точка z -площини (рис. 3.5).

Вся уявна вісь із p -площини відображається в одиничне коло на z -площині, ліва півплощина p відображається в одиничну окружність, а права півплощина p – у ділянку, розташовану поза одиничним колом на z -площині.

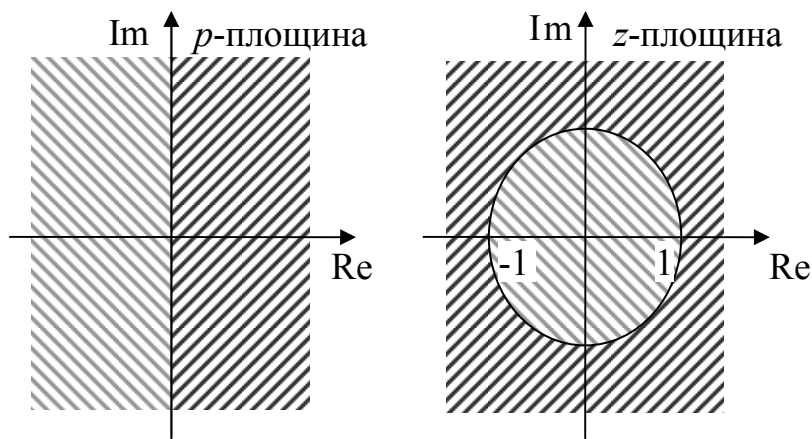


Рис. 3.5. Відповідність p -площини і z -площини

Висновки:

1. Оскільки всі полюси стійкого аналогового фільтра розташовані в лівій половині p -площини, а полюси стійкого дискретного фільтра – усередині одиничного кола z -площини, то при білінійному перетворенні фізично реалізовані стійкі аналогові фільтри перетворюються на фізично реалізовані стійкі дискретні фільтри.

2. При невеликих ω_d відображення майже лінійне, однак для основної частини частотної шкали воно істотно нелінійне, і сильно обмежує сферу застосування білінійного перетворення. Існує, що правда, досить великий клас фільтрів, для яких частотна деформація

може бути скомпенсована. До них належать ФНЧ, ФВЧ, СФ і РФ. Ефекти нелінійності співвідношення між частотними шкалами аналогового і цифрового фільтрів вдається врахувати лише в тому випадку, коли частотна характеристика аналогового фільтра має вигляд ступеневої функції.

3. При білінійному перетворенні ні імпульсна, ні фазова характеристики аналогового фільтра не будуть збігатися з характеристиками цифрового фільтра.

3.6. Функції пакета MATLAB для проектування цифрових фільтрів із нескінченною імпульсною характеристикою

У пакеті передбачено ряд функцій, що здійснюють розрахунок аналогових апроксимацій фільтрів низьких частот, серед яких можна виділити такі: функції, які використовуються для визначення мінімального порядку і частоти зрізу аналогового або цифрового фільтра за заданими необхідними характеристиками фільтра; функції, що реалізують методи дискретизації аналогових фільтрів.

3.6.1. Функції для проектування фільтрів із НЧ

Для проектування цифрових і аналогових фільтрів Баттерворта і Бесселя використовується функція **BUTTER** і **BESSELF** відповідно [2–4]. Оскільки синтаксис цих функцій однаковий, то розглянемо використання функцій на прикладі **butter**.

[b,a]=butter(N,w) проектує цифровий НЧ-фільтр Баттерворта N -го порядку і повертає коефіцієнти фільтра у векторах **b** і **a** довжиною $N + 1$. Частота зрізу **w** має бути $0 < w < 1$, з 1, яка відповідає половині заданої частоти дискретизації. Якщо **w = [w1 w2]**, то **butter** повертає смуговий фільтр порядку $2N$ зі смугою пропускання $w1 < \omega < w2$.

[b,a]=butter(N,w,'high') – проектується ВЧ-фільтр.

[b,a]=butter(N,w,'stop') – проектується режекторний (зі смугою заглушення) фільтр, якщо **w = [w1 w2]**.

Коли функція використовується із трьома аргументами в лівій частині, тобто **[z,p,k]=butter(...)**, нулі та полюси повертаються у векторах-стовпцях **z** і **p** довжиною N і скаляром **k** – коефіцієнтом підсилення.

butter(N,w,'s'), **butter(N,w,'high','s')** і **butter(N,w,'stop','s')** проєктують аналогові фільтри Баттерворта. Тому w може бути > 1 .

Для проєктування цифрових та аналогових фільтрів Чебишева 1 і 2 типів використовуються функції **CHEBY1** і **CHEBY2** відповідно [2–4]. Оскільки синтаксис цих функцій однаковий, то розглянемо використання функцій на прикладі **cheby1**.

[b,a]=cheby1(N,Ap,w) проєктує цифровий НЧ-фільтр Чебишева N -го порядку з максимальною пульсацією **Ap** децибел у смузі пропускання.

cheby1 повертає коефіцієнти фільтра у векторах **b** і **a** довжиною $N + 1$. Частота зрізу w має бути $0 < w < 1$, з 1, яка відповідає половині частоти дискретизації (частоті Найквіста). Використовуйте **Ap = 0.5** як початкову точку, якщо ви не впевнені у виборі **Ap**.

Якщо $w=[w1\ w2]$, то **cheby1** повертає смуговий фільтр порядку $2N$ зі смугою пропускання $w1 < \omega < w2$.

[b,a]=cheby1(N,Ap,w,'high') проєктує ВЧ-фільтр.

[b,a]=cheby1(N,Ap,w,'stop') проєктує фільтр зі смугою заглушення, якщо $w = [w1\ w2]$.

Коли функція використовується із трьома аргументами в лівій частині, тобто **[z,p,k]=cheby1(...)**, нулі та полюси повертаються у векторах-стовпцях **z** і **p** довжиною N і скаляром **k**.

cheby1(N,Ap,w,'s'), **cheby1(N,Ap,w,'high','s')** і **cheby1(N,Ap,w,'stop','s')** проєктують аналогові фільтри Чебишева 1 типу. Тому w може бути більше 1.

Для проєктування еліптичного цифрового і аналогового фільтра використовується функція **ELLIP** [2–4].

[b,a]=ellip(N,Ap,As,w) проєктує цифровий еліптичний НЧ-фільтр N -го порядку з пульсацією **Ap** децибел у смузі пропускання і ослабленням **As** децибел у смузі заглушення, повертає коефіцієнти фільтра у векторах **b** і **a** довжиною $N + 1$.

Частота зрізу w має бути $0 < w < 1$, з 1, яка відповідає половині заданої частоти дискретизації. Використовуйте **Ap = 0.5** і **As = 20** як початкові точки, якщо ви не впевнені в їхньому виборі.

Якщо $w = [w1\ w2]$, то **ellip** повертає смуговий фільтр порядку $2N$ зі смугою пропускання $w1 < \omega < w2$.

[b,a]=ellip(N,Ap,As,w,'high') проєктує ВЧ-фільтр.

[b,a]=ellip(N,Ap,As,w,'stop') проєктує фільтр зі смугою заглушення, якщо $w = [w1\ w2]$.

Коли функція використовується із трьома аргументами в лівій частині, тобто $[z,p,k]=\text{ellip}(\dots)$, нулі та полюси повертаються у векторах-стовпцях z і p довжиною N і скаляром k – коефіцієнтом підсилення.

$\text{ellip}(N,Ap,As,w,'s')$, $\text{ellip}(N,Ap,As,w,'high','s')$ і $\text{ellip}(N,Ap,As,w,'stop','s')$ проектують аналоговий еліптичний фільтр. Тому w може бути більше 1.

3.6.2. Функції для вибору порядку НІХ-фільтра

Для вибору порядку НІХ-фільтрів використовуються такі функції [2–4]:

- **BUTTORD** – для цифрового фільтра Баттерворта;
- **CHEB1ORD** – для цифрового фільтра Чебишева 1 типу;
- **CHEB2ORD** – для цифрового фільтра Чебишева 2 типу;
- **ELLIPORD** – для цифрового еліптичного фільтра.

Оскільки синтаксис всіх чотирьох функцій ідентичний, то розглянемо застосування перерахованих функцій на прикладі **buttord**.

$[N,w]=\text{buttord}(wp,ws,Ap,As)$ повертає найменший порядок N цифрового фільтра Баттерворта, що має пульсацію не більш ніж Ap децибел у смузі пропускання і має, принаймні, As децибел ослаблення в смузі заглушення. Смуга пропускання визначається від 0 до wp , а смуга заглушення – від ws до 1 (частота ws нормована на частоту Найквіста).

buttord також повертає w – натуральну частоту Баттерворта (або «3 дБ частоти»), яка далі може бути використана з **butter** для розрахунку параметрів фільтра Баттерворта.

$[N,w]=\text{buttord}(wp,ws,Ap,As,'s')$ виконує обчислення для аналогового фільтра.

Коли Ap дорівнює 3 дБ, w в **butter** еквівалентне wp в **buttord**.

3.6.3. Визначення групової затримки фільтра

Для визначення групової затримки цифрового фільтра використовується функція **GRPDELAY** [2–4].

$[Gd,w]=\text{grpdelay}(b,a,N)$ повертає N -вимірні вектори Gd і w , що містять групову затримку і частоти (у радіанах), на яких буде здійснюватися оцінювання. Групова затримка визначається за виразом (3.5). Частота відгуку оцінюється в N точках, рівномірно розташованих на верхній половині одиничного кола. Коли N – степінь 2, то обчислення проводяться швидше з використанням **FFT**. Якщо ви не визначили N , то за замовчуванням воно дорівнює 512.

grpdelay(b,a,N,'whole') використовує **N** точок по всьому колу.

[Gd,f]=grpdelay(b,a,N,Fc) і **[Gd,f]=grpdelay(b,a,N,'whole',Fc)** на заданій частоті дискретизації **Fc** (у герцах) повертає вектор **f** (у герцах).

Gd=grpdelay(b,a,w) і **Gd=grpdelay(b,a,f,Fc)** повертають групову затримку, яка оцінюється в точках **w** (у радіанах) або **f** (у герцах), де **Fc** – частота дискретизації (у герцах).

grpdelay(b,a,...) без вихідних аргументів рисує групову затримку як функцію нормалізованої частоти ($Nyquist = 1$) у поточному графічному вікні.

3.6.4. Корекція фазових кутів

Як уже було відзначено вище, частотні характеристики ЦФ є періодичними. Для корекції фазових кутів використовується функція **UNWRAP**.

unwrap(p) коректує фазові кути елементів одновимірного масиву **p** в (радіанах) при переході через значення π , доповнюючи їх значеннями $\pm 2\pi$ для того, щоб усунути розриви функції.

3.6.5. Дискретизація аналогових фільтрів

Для реалізації методу білінійного перетворення використовується функція **BILINEAR**.

[zd,pd,kd]=bilinear(z,p,k,Fc) перетворить передавальну функцію в p -площині, обумовлену **z**, **p** і **k**, у дискретний еквівалент z -перетворення, отриманий з білінійного перетворення вигляду (3.17). Вектори-стовпці **z** і **p** визначають нулі та полюси, скаляр **k** визначає коефіцієнт підсилення і **Fc** – частоту дискретизації (у герцах).

[bz,az]=bilinear(b,a,Fc) перетворить вектори-рядки, що містять коефіцієнти чисельника **b** і знаменника **a** передавальної функції вигляду (3.8) при убуванні степеня p , у коефіцієнти z -перетворення **bz** і **az**.

Кожна з перерахованих форм **bilinear** дозволяє вводити додаткові необов'язкові аргументи, які визначають попередню трансформацію частот. Наприклад, **[zd,pd,kd]=bilinear(z,p,k,Fc,Fp)** дозволяє заздалегідь трансформувати частоти перед білінійним перетворенням так, що частота відгуку до і після установки відповідності точно збігається із частотою **Fp** (точка відповідності **Fp** визначається в герцах).

Для реалізації методу інваріантного перетворення ІХ використовується функція **IMPINVAR**.

[bz,az]=impinvar(b,a,Fc) створює цифровий фільтр із коефіцієнтами чисельника та знаменника **bz** і **az** відповідно, чий імпульсний відгук еквівалентний імпульсному відгуку аналогового фільтра з коефіцієнтами **b** і **a** при частоті дискретизації **Fc** (у герцах).

Якщо **Fc** не визначено, то за замовчуванням дорівнює 1 Гц.

3.7. Проектування фільтра нижніх частот із нескінченною імпульсною характеристикою

Розглянемо приклад. Необхідно спроектувати НІХ-фільтра нижніх частот дискретного часу з характеристиками фільтра Баттерворта, який задовольняє таким специфікаціям:

гранична частота смуги пропускання	0,5 кГц,
ширина смуги переходу	0,5 кГц,
нерівномірність у смузі пропускання	3 дБ
загасання в смузі заглушення	20 дБ,
частота дискретизації	8 кГц,
порядок фільтра	мінімальний.

Для отримання ПФ використовувати методи інваріантного перетворення ІХ і білінійного *z*-перетворення.

Обчислимо частоту початку заглушення:

$$f_s = f_{\pi} + \Delta f = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ кГц.}$$

Розглянемо синтез ЦФ за допомогою методу *інваріантного перетворення ІХ*.

Обчислимо порядок фільтра-прототипу. Оскільки у методі інваріантного перетворення ІХ не відбувається деформації частот, то скористаємося виразом (3.10) для визначення порядку фільтра-прототипу

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0,3} - 1}{10^2 - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{1}{0,5}\right)} = 3,3181.$$

Отже, вибираємо порядок фільтра $N = 4$.

Відповідно до виразу (3.9) передавальна функція аналогового фільтра-прототипу Баттерворта має вигляд

$$H(p) = \frac{1}{\prod_{m=1}^4 (p - p_m)},$$

де $p_m = e^{j\pi[1/2+(2m-1)/2n]}$ – полюси передавальної функції $H(p)$.

Обчислимо полюси передавальної функції:

$$p_1 = e^{j\pi[0,5+1/8]} = e^{j0,625\pi} = \cos(0,625\pi) + j\sin(0,625\pi) = -0,3827 + j0,9239;$$

$$p_2 = e^{j\pi[0,5+3/8]} = -0,9239 + j0,3827;$$

$$p_3 = e^{j\pi[0,5+5/8]} = -0,9239 - j0,3827;$$

$$p_4 = e^{j\pi[0,5+7/8]} = -0,3827 - j0,9239.$$

У результаті маємо таку ПФ аналогового фільтра-прототипу Баттерворта:

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2,6131p + 3,4142p^2 + 2,6131p^3 + p^4}.$$

Перед тим як застосовувати метод інваріантного перетворення ІХ, необхідно масштабувати нормовану передавальну функцію. Для цього p змінюється на p / ω_{Π} , де $\omega_{\Pi} = 2\pi f_{\Pi}^a / f_c = 2\pi \cdot 0,5 / 8 = 0,3927$ – нормована колова частота зрізу:

$$\begin{aligned} H'(p) &= H(p) \Big|_{p=p/\omega_{\Pi}} = \\ &= \frac{1}{1 + 2,6131 \frac{p}{0,3927} + 3,4142 \left(\frac{p}{0,3927} \right)^2 + 2,6131 \left(\frac{p}{0,3927} \right)^3 + \left(\frac{p}{0,3927} \right)^4} = \\ &= \frac{0,0238}{1 + 1,0262p + 0,5265p^2 + 0,1582p^3 + 0,0238p^4}. \end{aligned}$$

Відповідно до виразу (3.13) отриману ПФ необхідно розкласти на елементарні дроби. Полюси ПФ рівні:

$$p_1 = -1,2022 + j2,9025;$$

$$p_2 = -1,2022 - j2,9025;$$

$$p_3 = -2,9025 + j1,2022;$$

$$p_4 = -2,9025 - j1,2022.$$

Тоді

$$\begin{aligned} c_1 = H(p)(p - p_1) \Big|_{p=p_1} &= \frac{0,0238}{(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)} \Big|_{p=-1,2022+j2,9025} = \\ &= -1,4512 + j0,6011; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 = H(p)(p - p_2) \Big|_{p=p_2} &= \frac{0,0238}{(p - p_1)(p - p_3)(p - p_4)} \Big|_{p=-1,2022-j2,9025} = \\ &= -1,4512 - j0,6011; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 = H(p)(p - p_3) \Big|_{p=p_3} &= \frac{0,0238}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_4)} \Big|_{p=-2,9025+j1,2022} = \\ &= 1,4512 - j3,5036; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 = H(p)(p - p_4) \Big|_{p=p_4} &= \frac{0,0238}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)} \Big|_{p=-2,9025-j1,2022} = \\ &= 1,4512 + j3,5036. \end{aligned}$$

Підставляючи отримані значення у вираз (3.13), маємо

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{-1,4512 + j0,6011}{p + 1,2022 - j2,9025} + \frac{-1,4512 - j0,6011}{p + 1,2022 + j2,9025} + \\ &+ \frac{1,4512 - j3,5036}{p + 1,2022 - j2,9025} + \frac{1,4512 + j3,5036}{p + 2,9025 + j1,2022}. \end{aligned}$$

Виконавши підстановку (3.15), отримаємо

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{-1,4512 + j0,6011}{1 - e^{(-1,2022 + j2,9025)8} z^{-1}} + \frac{-1,4512 - j0,6011}{1 - e^{(-1,2022 - j2,9025)8} z^{-1}} + \\
 &+ \frac{1,4512 - j3,5036}{1 - e^{(-1,2022 + j2,9025)8} z^{-1}} + \frac{1,4512 + j3,5036}{1 - e^{(-1,2022 - j2,9025)8} z^{-1}} = \\
 &= \frac{0,0030z^{-1} + 0,0094z^{-2} + 0,0018z^{-3}}{1 - 2,9847z^{-1} + 3,4379z^{-2} - 1,7974z^{-3} + 0,3584z^{-4}}.
 \end{aligned}$$

Нижче наведено програму, за допомогою якої можна обчислити ПФ заданого НІХ-фільтра методом інваріантного перетворення ІХ, а також групову та фазову затримки.

% Приклад №3.1

Fc=8; %частота дискретизації

Fp=0.5; %частота зрізу

Fs=1; %частота початку заглушення

Ap=3; %нерівномірність у смузі пропускання

As=20; %загасання в смузі заглушення

FN=Fc/2; %частота Найквіста

wp=2*pi*Fp; %колова частота зрізу

ws=2*pi*Fs; % колова частота початку заглушення

% визначення порядку фільтра

[N,w]=buttord(wp,ws,Ap,As,'s');

[b,a]=butter(N,wp,'s'); %обчислення ПФ аналогового фільтра

[bz,az]=impinvar(b,a,Fc); %інваріантне перетворення ІХ

[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика ЦФ

mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі

subplot(2,2,1);

plot(f,mag), grid on; %виведення АЧХ

xlabel('Frequency (khz)'),

ylabel('Magnitude (db)')

subplot(2,2,3);

plot(f,unwrap(angle(H))), grid on; %виведення ФЧХ

xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Phase (radians)')

subplot(2,2,2);

gd = grpdelay(bz,az); %груповая затримка

```
pd = -unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка
%виведення групової і фазової затримок
plot(f,gd,f,pd,':'), grid on; legend('Group Delay','Phase Delay');
subplot(2,2,4); zplane(bz,az); %виведення нулів і полюсів ПФ
```

Отримана АЧХ (рис. 3.6) повністю задовольняє заданій специфікації фільтра.

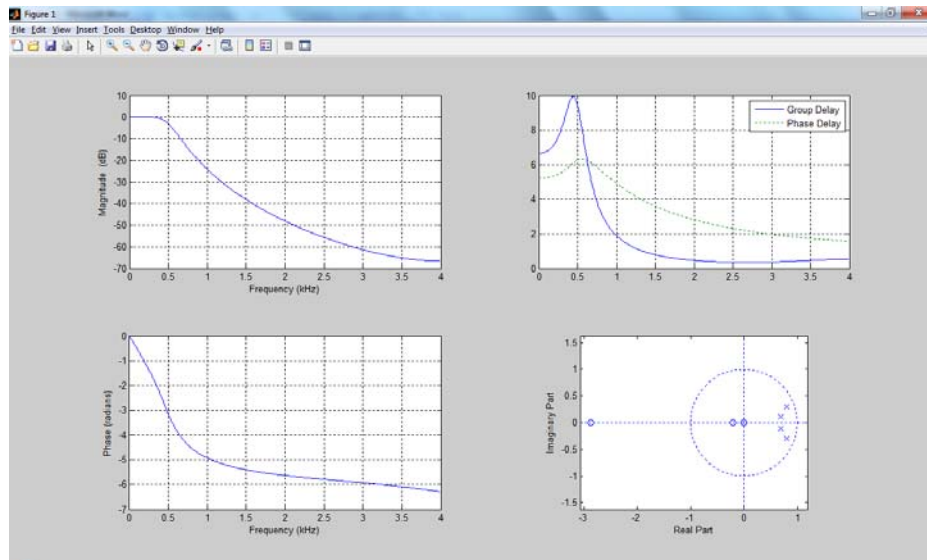


Рис. 3.6. АЧХ, ФЧХ (ліворуч), групова та фазова затримки (праворуч угорі), діаграма нулів і полюсів (праворуч унизу) низькочастотного НІХ-фільтра, отриманого методом інваріантного перетворення ІХ

Розглянемо синтез ЦФ за допомогою методу *білінійного z-перетворення*.

Обчислимо порядок фільтра-прототипу. Для цього на основі специфікації з урахуванням виразу (2.18) знаходимо деформовані частоти:

$$\omega_{дп} = 2 \cdot 8 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi \cdot 0,5}{2 \cdot 8}\right) = 3,1826;$$

$$\omega_{дс} = 2 \cdot 8 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi \cdot 1}{2 \cdot 8}\right) = 6,6274.$$

Скористаємося виразом (2.10) для визначення порядку фільтра-прототипу:

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0,3} - 1}{10^2 - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{6,6274}{3,1826}\right)} = 3,1355.$$

Отже, вибираємо порядок фільтра $N = 4$. Як було показано вище, ПФ аналогового фільтра-прототипу Баттерворта має такий вигляд:

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2,6131p + 3,4142p^2 + 2,6131p^3 + p^4}.$$

Виконаємо масштабування нормованої передавальної функції. Для цього p змінюється на $p / \omega'_{\text{дп}}$, де $\omega'_{\text{дп}} = \omega_{\text{дп}} / f_c = 3,1826 / 8 = 0,3978$ – нормована колова частота зрізу:

$$\begin{aligned} H'(p) &= H(p) \Big|_{p=p/\omega'_{\text{дп}}} = \\ &= \frac{1}{1 + 2,6131 \frac{p}{0,3978} + 3,4142 \left(\frac{p}{0,3978}\right)^2 + 2,6131 \left(\frac{p}{0,3978}\right)^3 + \left(\frac{p}{0,3978}\right)^4} = \\ &= \frac{0,025}{1 + 1,0396p + 0,5403p^2 + 0,1645p^3 + 0,025p^4}. \end{aligned}$$

Знаходимо ПФ цифрового НІХ-фільтра, виконавши заміну змінної p відповідно до (3.17). При цьому враховуємо, що ПФ аналогового фільтра була знайдена для нормованої частоти зрізу (тобто частота дискретизації прийнята = 1). Маємо:

$$\begin{aligned} H(z) &= H'(p) \Big|_{p=2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \\ &= \frac{0,025}{1 + 1,04 \cdot 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,54 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,16 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3 + 0,03 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^4} = \\ &= \frac{0,0009 + 0,0037 z^{-1} + 0,0056 z^{-2} + 0,0037 z^{-3} + 0,0009 z^{-4}}{1 - 2,9768 z^{-1} + 3,4223 z^{-2} - 1,7861 z^{-3} + 0,3556 z^{-4}}. \end{aligned}$$

Нижче наведено програму, за допомогою якої можна обчислити ПФ заданого НІХ-фільтра методом інваріантного перетворення ІХ, а також групову та фазову затримки.

% Приклад №3.2

Fc=8; %частота дискретизації

Fp=0.5; %частота зрізу

Fs=1; %частота початку заглушення

Ap=3; %нерівномірність у смузі пропускання

As=20; %загасання в смузі заглушення

FN=Fc/2; %частота Найквіста

wp=2*pi*Fp; % колова частота зрізу

ws=2*pi*Fs; % колова частота початку заглушення

%визначення порядку фільтра

[N,w]=buttord(Fp/FN,Fs/FN,Ap,As);

[b, a]=butter(N,wp,'s'); %обчислення ПФ аналогового фільтра

[bz, az]=bilinear(b,a,Fc,Fp); %білінійне перетворення

[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика ЦФ

mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі

subplot(2,2,1); plot(f,mag), grid on; %виведення АЧХ

xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Magnitude (db)')

subplot(2,2,3);

plot(f,unwrap(angle(H))), grid on; %виведення ФЧХ

xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Phase (radians)')

subplot(2,2,2); gd=grpdelay(bz,az); %групова затримка

pd=-unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка

%виведення групової та фазової затримок

plot(f,gd,f,pd,':'), grid on; legend('Group Delay','Phase Delay');

subplot(2,2,4); zplane(bz,az); %виведення нулів і полюсів ПФ

Результати програми подано на рис. 3.7.

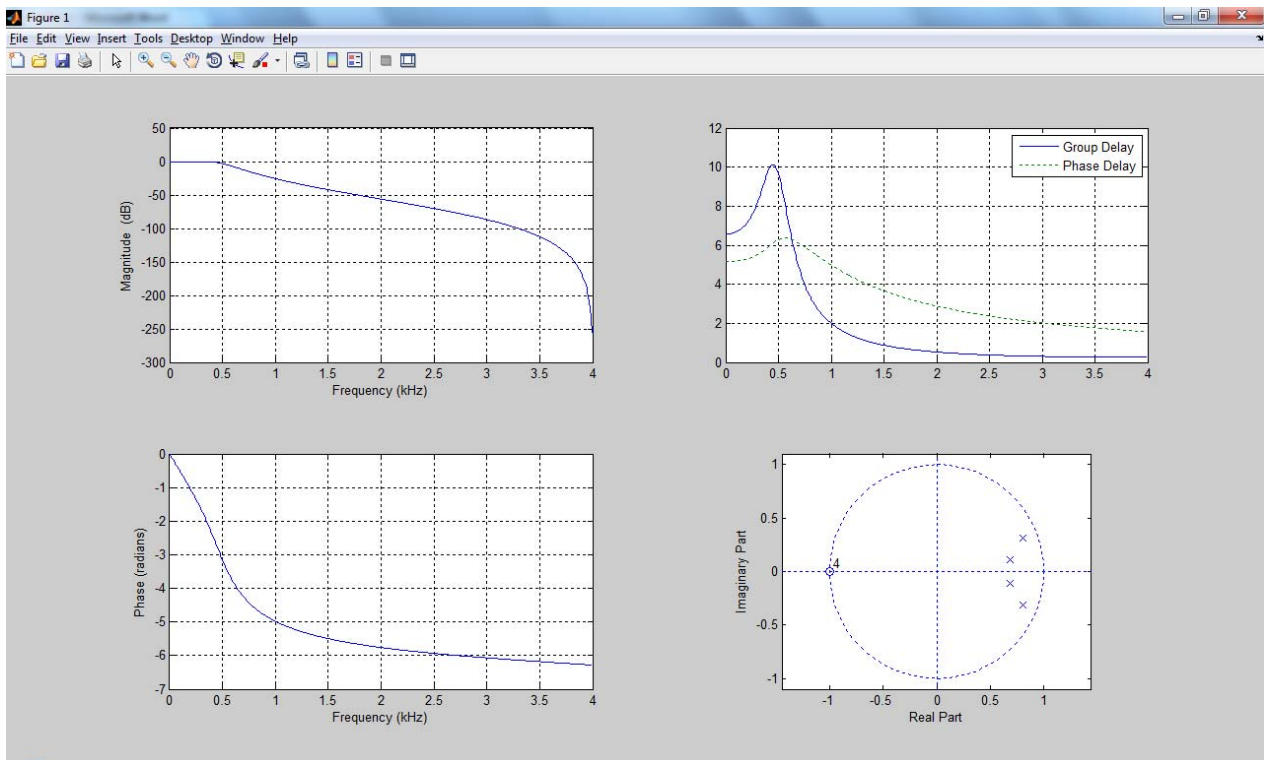


Рис. 3.7. Результати роботи програми розрахунку низькочастотного НІХ-фільтра, отриманого методом білінійного перетворення

Текст програми «Приклад № 3.2» можна ще спростити, якщо врахувати, що за замовчуванням функція **butter** розраховує коефіцієнти цифрового фільтра з використанням методу білінійного перетворення. Тому в програмі необхідно використовувати нормовані частоти

```

wp=Fr/FN; %нормована частота зрізу
ws=Fs/FN; %нормована частота початку заглушення
і дві команди
[b, a]=butter(N,wp,'s'); %обчислення ПФ аналогового фільтра
[bz, az]=bilinear(b,a,Fs,Fr); % білінійне перетворення
можна замінити однією
[bz, az]=butter(N,wp); %метод білінійного перетворення

```

Результати виконання команд будуть еквівалентними.
Таким чином, маємо такий текст програми:

% Приклад №3.3

```
Fc=8; %частота дискретизації
Fp=0.5; %частота зрізу
Fs=1; %частота початку заглушення
Ap=3; %нерівномірність у смузі пропускання
As=20; %загасання в смузі заглушення
FN=Fc/2; %частота Найквіста
wp=Fp/FN; %нормована частота зрізу
ws=Fs/FN; %нормована частота початку заглушення
[N,w]=buttord(wp,ws,Ap,As); %визначення порядку фільтра
%розрахунки методом білінійного перетворення
[bz,az]=butter(N,wp);
[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика
mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі
subplot(2,2,1); plot(f,mag), grid on; % виведення АЧХ
xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Magnitude (db)')
subplot(2,2,3);
plot(f,unwrap(angle(H))), grid on; % виведення ФЧХ
xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Phase (radians)')
subplot(2,2,2); gd = grpdelay(bz,az); %групова затримка
pd = -unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка
% виведення групової та фазової затримок
plot(f,gd,f,pd,':'), grid on; legend('Group Delay','Phase Delay');
subplot(2,2,4); zplane(bz,az); % виведення нулів і полюсів ПФ
```

Результат програми повністю збігається з результатом на рис. 3.7.

Необхідно відзначити, що в наведених вище прикладах використовувалася схема розрахунків ЦФ методом 1 (рис. 3.1).

3.8. Проектування фільтра верхніх частот із нескінченною імпульсною характеристикою

Розглянемо приклад проектування НІХ-фільтра верхніх частот, що задовольняє специфікації, яку наведено в прикладі підрозділу 3.6. Оскільки метод інваріантного перетворення ІХ не підходить для розрахунків ФВЧ, то розглянемо розв'язування поставленої задачі методом білінійного перетворення ІХ. Для цього достатньо у тексті

програми «Приклад № 3.3» замінити команду `[bz, az]=butter(N,wp)` на команду `[bz, az]=butter(N,wp, 'high')`.

В результаті отримаємо ФВЧ із НІХ, зображений на рис. 3.8.

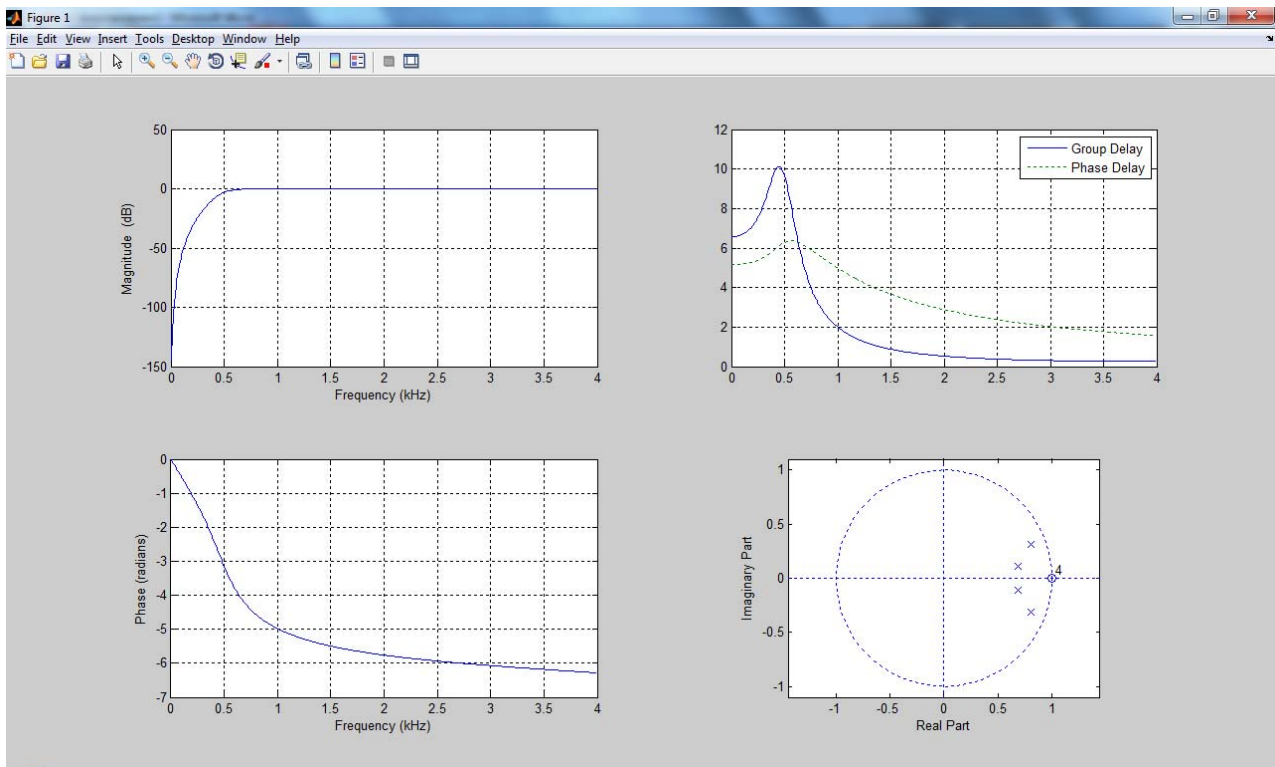


Рис. 3.8. Результати роботи програми розрахунків високочастотного НІХ-фільтра, отриманого методом білінійного перетворення

3.9. Проектування смугового фільтра із нескінченною імпульсною характеристикою

Необхідно спроектувати смуговий НІХ-фільтр дискретного часу з характеристиками фільтра Чебишева типу 1, який задовольняє таким специфікаціям:

смуга пропускання	1500–2500 Гц,
ширина смуги переходу	500 Гц,
нерівномірність у смузі пропускання	3 дБ,
загасання в смузі заглушення	20 дБ,
частота дискретизації	8 кГц.
порядок фільтра	мінімальний.

Для одержання ПФ будемо використовувати методи інваріантного перетворення ІХ і білінійного z -перетворення.

Нижче наведено програму, за допомогою якої можна обчислити ПФ заданого НІХ-фільтра методом інваріантного перетворення ІХ, а також групову і фазову затримки.

% Приклад №3.4

Fc=8; %частота дискретизації

Fp1=1.5; Fp2=2.5; %смуга пропускання

Fs1=1; Fs2=3; %межі смуги заглушення

Ap=3; %нерівномірність у смузі пропускання

As=20; %загасання в смузі заглушення

FN=Fc/2; %частота Найквіста

Fp=[Fp1 Fp2]; Fs=[Fs1 Fs2];

wp=2*pi*Fp; %колова частота смуги пропускання

ws=2*pi*Fs; %колова частота смуги заглушення

%визначення порядку фільтра

[N,w]=cheb1ord(wp,ws,Ap,As,'s');

%обчислення ПФ аналогового фільтра

[b, a]=cheby1(N,As,wp,'s');

[bz, az]=impinvar(b,a,Fc); %інваріантне перетворення ІХ

[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика ЦФ

mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі

subplot(2,2,1); plot(f,mag), grid on; % виведення АЧХ

xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Magnitude (db)')

subplot(2,2,3);

plot(f,unwrap(angle(H))), grid on; % виведення ФЧХ

xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Phase (radians)')

subplot(2,2,2); gd = grpdelay(bz,az); %групова затримка

pd = -unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка

% виведення групової та фазової затримок

plot(f,gd,f,pd,':'), grid on; legend('Group Delay','Phase Delay');

subplot(2,2,4); zplane(bz,az); % виведення нулів і полюсів ПФ

В результаті виконання програми «Приклад № 3.4» отримуємо СФ, що задовольняє заданій специфікації (рис. 3.9).

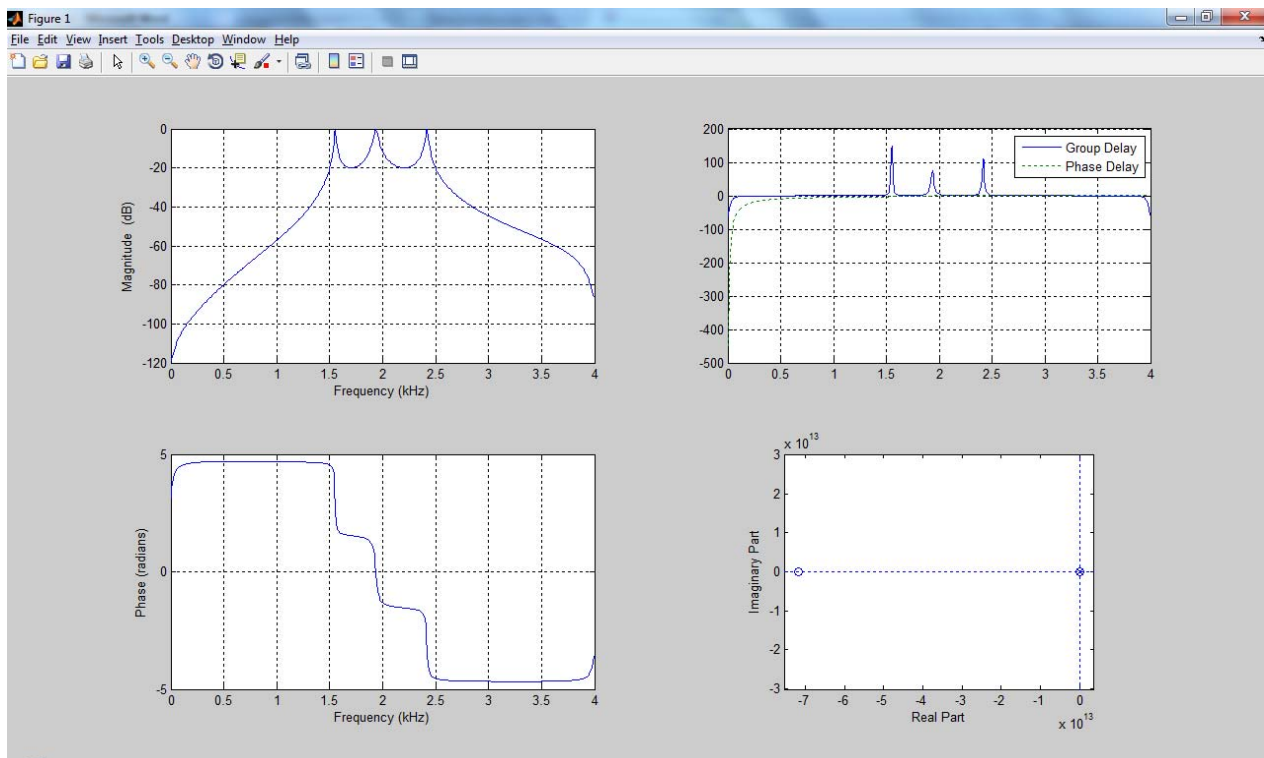


Рис. 3.9. Результати роботи програми розрахунку
смугового НІХ-фільтра, отриманого методом
інваріантного перетворення ІХ

Наведемо текст програми для обчислення ПФ заданого НІХ-фільтра методом білінійного z -перетворення, групової та фазової затримки.

% Приклад №3.5

Fc=8; %частота дискретизації

Fp1=1.5; Fp2=2.5; %смуга пропускання

Fs1=1; Fs2=3; %межі смуги заглушення

Ap=3; %нерівномірність у смузі пропускання

As=20; %загасання в смузі заглушення

FN=Fc/2; %частота Найквіста

wp=[Fp1/FN Fp2/FN]; %нормована смуга пропускання

ws=[Fs1/FN Fs2/FN]; %нормовані межі смуги заглушення

[N,w]=cheb1ord(wp,ws,Ap,As); %визначення порядку фільтра

[bz,az]=cheby1(N,As,wp); %метод білінійного перетворення

[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика

mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі

```

subplot(2,2,1);
plot(f,mag), grid on; % виведення АЧХ
xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Magnitude (db)')
subplot(2,2,3);
plot(f,unwrap(angle(H))), grid on; % виведення ФЧХ
xlabel('Frequency (khz)'), ylabel('Phase (radians)')
subplot(2,2,2);
gd = grpdelay(bz,az); %групова затримка
pd = -unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка
% виведення групової та фазової затримок
plot(f,gd,f,pd,':'), grid on;
ylim([-150 150]); legend('Group Delay','Phase Delay');
subplot(2,2,4);
zplane(bz,az); % виведення нулів і полюсів ПФ

```

Результати виконання програми зображено на рис. 3.10.

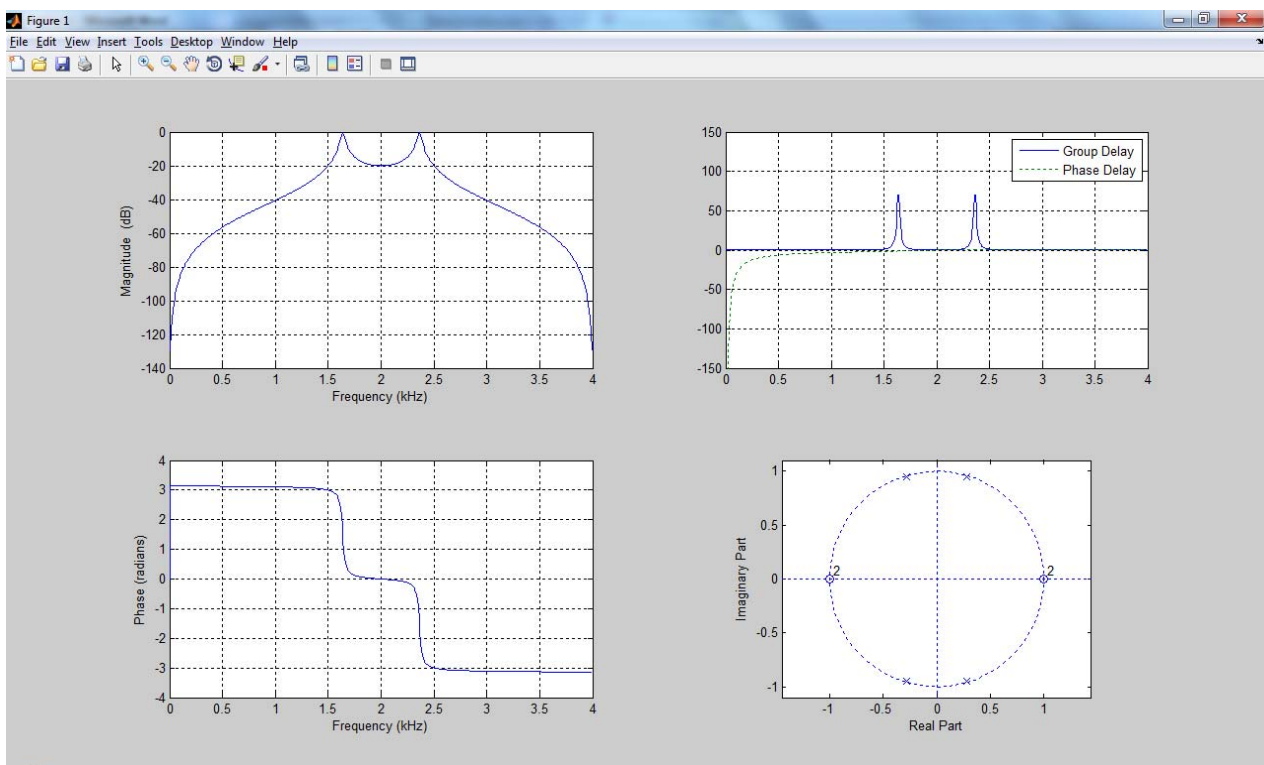


Рис.3.10. Результати роботи програми розрахунку
смугового НІХ-фільтра, отриманого методом
білінійного z -перетворення

3.10. Проектування режекторного фільтра із нескінченною імпульсною характеристикою

Необхідно спроектувати режекторний НІХ-фільтр дискретного часу з характеристиками фільтра Чебишева типу 2, який задовольняє таким специфікаціям:

смуга затримування	1500–2500 Гц,
ширина смуги переходу	500 Гц,
нерівномірність у смузі пропускання	3 дБ
загасання в смузі заглушення	20 дБ,
частота дискретизації	8 кГц;
порядок фільтра	мінімально можливий.

Для одержання ПФ будемо використовувати метод білінійного z -перетворення (метод інваріантного перетворення ІХ для проектування цифрового РФ використовувати не можна).

Нижче наведено програму, за допомогою якої можна обчислити ПФ заданого НІХ-фільтра методом білінійного z -перетворення, а також групову та фазову затримки.

%Приклад №3.6

Fc=8; %частота дискретизації

Fp1=1.5; Fp2=2.5; %смуга заглушення

Fs1=1; Fs2=3; %межі смуги пропускання

Ap=3; %нерівномірність у смузі пропускання

As=20; %загасання в смузі заглушення

FN=Fc/2; %частота Найквіста

wp=[Fp1/FN Fp2/FN]; %нормована смуга заглушення

ws=[Fs1/FN Fs2/FN]; %нормовані межі смуги пропускання

[N,w]=cheb2ord(wp,ws,Ap,As); %визначення порядку фільтра

% розрахунки ЦФ методом білінійного перетворення

[bz,az]=cheby2(N,As,wp,'stop');

[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика

subplot(2,2,1);

plot(f, 20*log10(abs(H))), grid on; % виведення АЧХ

xlabel('Frequency (khz)'),


```

ylabel('Magnitude (db)')
subplot(2,2,3);
plot(f,unwrap(angle(H))), grid on; % виведення ФЧХ
xlabel('Frequency (khz)'),
ylabel('Phase (radians)')
subplot(2,2,2); gd = grpdelay(bz,az); %групова затримка
pd = -unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка
% виведення групової та фазової затримок
plot(f,gd,f,pd,':'), grid on;
legend('Group Delay','Phase Delay');
subplot(2,2,4);
zplane(bz,az); % виведення нулів і полюсів ПФ

```

В результаті виконання програми отримуємо смуговий фільтр, що задовольняє заданій специфікації (рис. 3.11).

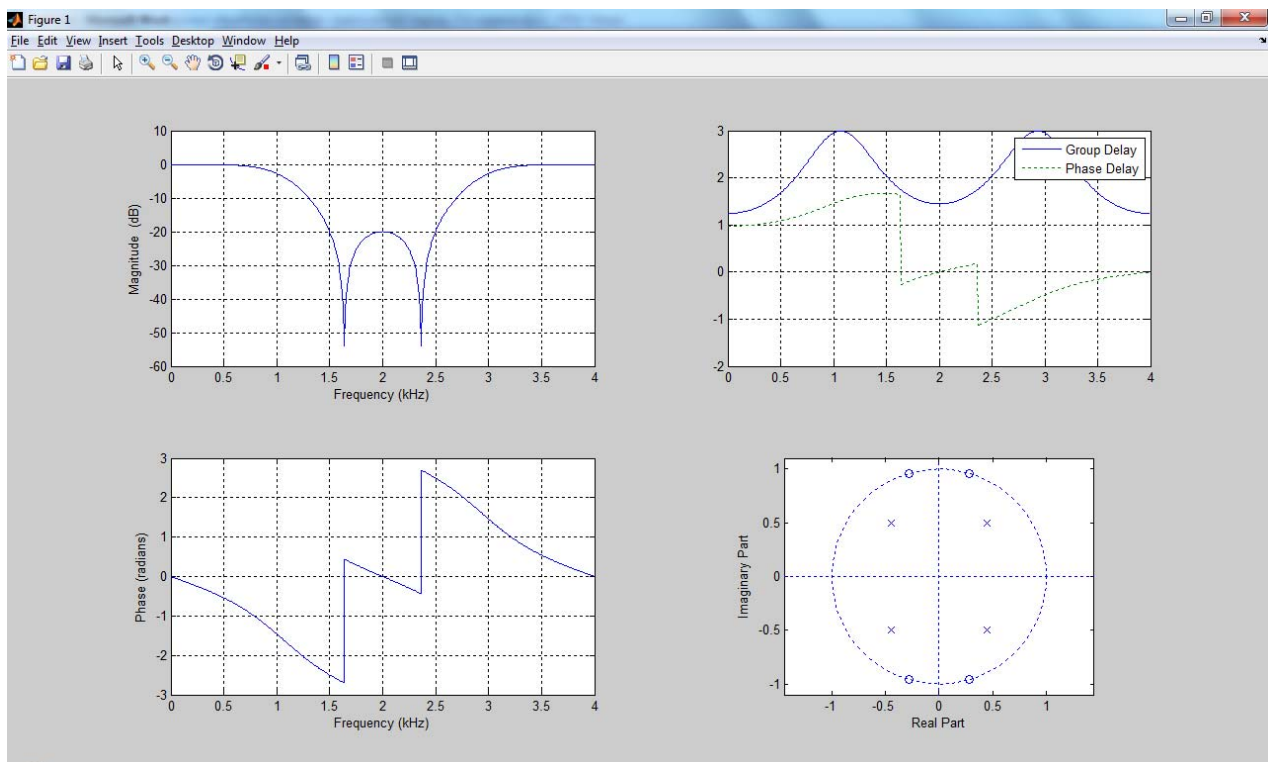


Рис. 3.11. Результати роботи програми розрахунку режекторного НІХ-фільтра, отриманого методом білінійного z -перетворення

Контрольні запитання

?

1. Які фільтри є рекурсивними?
2. Яким рекурсивним різницеvim рівнянням характеризуються цифрові НІХ-фільтри?
3. Який вигляд має передавальна функція НІХ-фільтра?
4. Що таке діаграма нулів і полюсів?
5. Що необхідно, щоб фільтр був стійким?
6. Як визначається порядок системи?
7. Що таке фазова затримка фільтра?
8. Що таке групова затримка фільтра?
9. Чому при проектуванні НІХ-фільтрів необхідно оцінювати фазову і групову затримки?
10. Чим відрізняються прямі і непрямі методи синтезу рекурсивних фільтрів?
11. Схеми розрахунку ЦФ за аналоговими прототипами.
12. Чим відзначаються специфікації вимог при проектуванні НІХ-фільтрів й СІХ-фільтрів?
13. Які аналогові фільтри-прототипи ви знаєте?
14. Як можна перетворити смугу частот аналогового фільтра?
15. Перерахуйте найбільш поширені методи дискретизації аналогових фільтрів.
16. Основна ідея методу інваріантного перетворення ІХ.
17. Переваги й недоліки методу інваріантного перетворення ІХ.
18. Основна ідея методу узгодженого z -перетворення.
19. Переваги й недоліки методу узгодженого z -перетворення.
20. Основна ідея методів відображення диференціалів.
21. Переваги й недоліки методів відображення диференціалів.
22. Основна ідея методу білінійного перетворення.
23. Переваги й недоліки методу білінійного перетворення.
24. Які є функції пакета MATLAB для проектування ЦФ із НІХ?

4. ПРОЕКТУВАННЯ ФІЛЬТРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТА FILTER DESIGN & ANALYSIS TOOL

4.1. Характеристика пакета *FDATool*

Є спеціальний пакет програм, де зібрано багато з функцій, розглянутих кожен окремо в розділах 2 і 3. Він має назву **FDATool** (Filter Design & Analysis Tool). Цей пакет містить зручний інтерфейс користувача і дозволяє здійснювати розрахування передавальної функції рекурсивних і нерекурсивних фільтрів різнотипними методами синтезу, переглядати характеристики фільтра, аналізувати зміну характеристик при квантуванні коефіцієнтів фільтра, відліків вхідного сигналу й результатів проміжних обчислень. Можлива робота з різними структурами фільтра. Виклик пакета здійснюється шляхом введення його імені в командному вікні **MatLab**:

```
>> fdatool
```

На екрані монітора з'явиться вікно програми **FDATool** (рис. 4.1). Крім основного меню і панелі інструментів тут міститься поточна інформація про структуру фільтра, його порядок, стійкість (**Current Filter Information**); графік допусків для АЧХ (у дБ) (**Filter Specifications**), а також вкладка **Design Filter** для задання типу фільтра, його класу, методу синтезу, порядку фільтра, частоти дискретизації, граничних частот смуг пропускання та затримування і припустимих загасань у цих смугах [2].

4.2. Задання специфікації і розрахунок фільтра

На вкладці **Design Filter** у нижній частині вікна (рис. 4.1) можна встановити перемикач **Filter Type** в одне з таких положень: Lowpass (ФНЧ), Highpass (ФВЧ), Bandpass (СФ) або Bandstop (РФ).

За допомогою перемикача **Design Method** вибирається рекурсивний (IIR – Infinite Impulse Response) або нерекурсивний (FIR – Finite Impulse Response) фільтр.

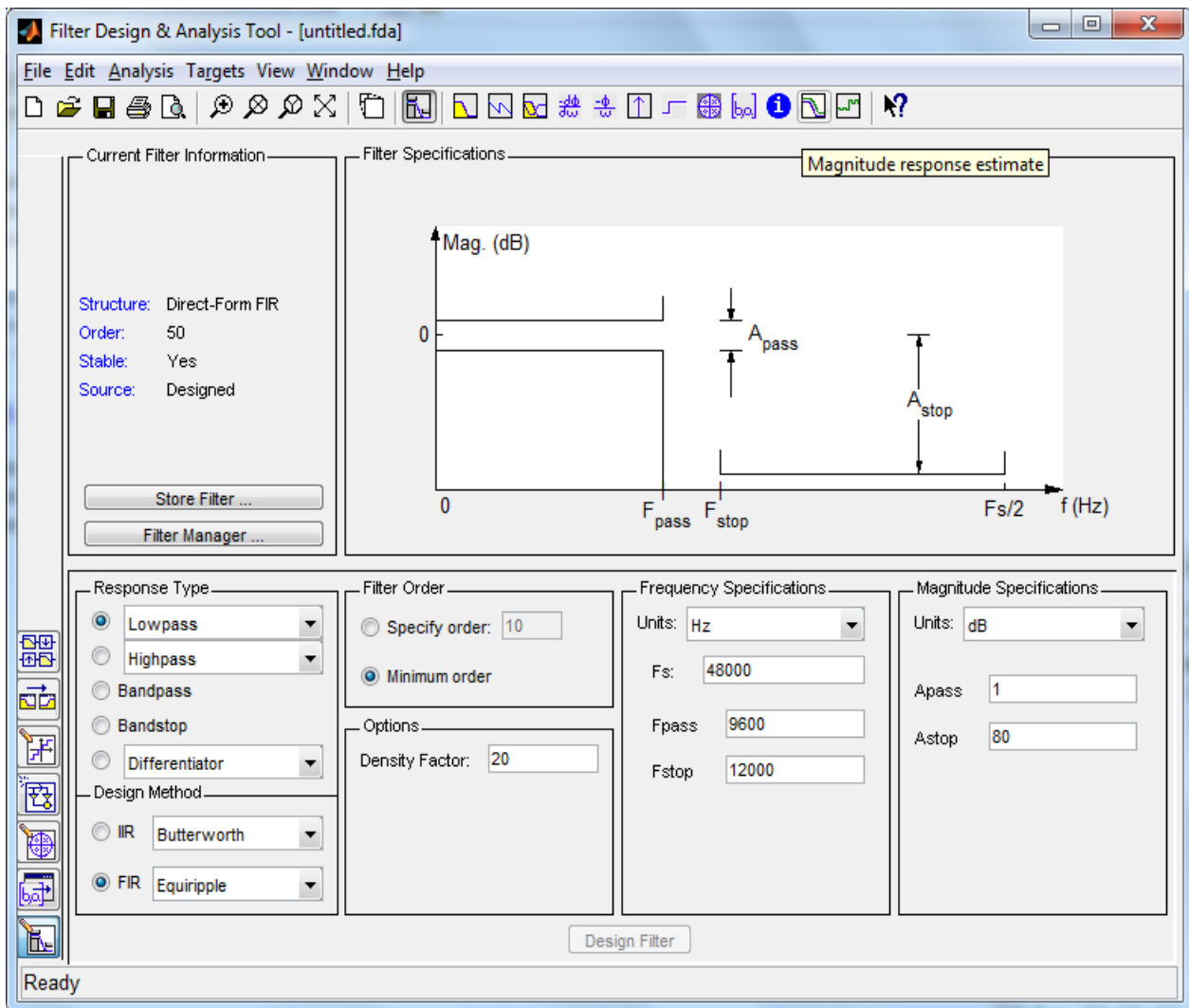


Рис. 4.1. Вікно програми FDATool
для проектування фільтра

Якщо вибрати рекурсивний фільтр, інакше НІХ-фільтр (IIR – Infinite Impulse Response), то далі в списку, що розкривається, потрібно вказати фільтр-прототип: Butterworth (Баттерворта), Chebyshev Type I (Чебишева), Chebyshev Type II (інверсний Чебишева), Elliptic (еліптичний). При синтезі цих фільтрів використовується метод білінійного z -перетворення.

У разі синтезу нерекурсивного фільтра (CIX-фільтра, FIR – Finite Impulse Response) можливі методи: Equiripple (метод Ремеза, що забезпечує рівномірні пульсації АЧХ), Least-Squares (забезпечення мінімуму середнього квадратичного відхилення АЧХ від заданої), Window (використання вікон як вагових функцій при синтезі фільтра) та ін.

У розділі **Filter Order** необхідно вказати необхідний порядок фільтра або встановити перемикач у положення Minimum order (найменший можливий порядок).

У розділах **Filter Specifications** і **Magnitude Specifications** задаються безпосередньо параметри специфікації фільтра. Смысл параметрів можна зрозуміти з розташованого у верхній частині вікна графіка допусків (Filter Specifications). Потрібно ввести частоту дискретизації F_s , граничні частоти смуги пропускання та смуги затримання (F_{pass} і F_{stop}), припустимі загасання в смузі пропускання і у смузі затримання (A_{pass} і A_{stop}). Після задання типу фільтра і його параметрів достатньо натиснути кнопку **Design Filter** (Конструювання фільтра) для того, щоб запустити програмне конструювання фільтра за заданими параметрами. Після цього, використовуючи кнопки панелі інструментів, можна переглянути і, якщо необхідно, скорегувати отримані характеристики фільтра.

4.3. Перегляд характеристик фільтра

Вивести на екран частотні та часові характеристики фільтра, діаграму полюсів і нулів, коефіцієнти фільтра зручно в спеціальному вікні перегляду шляхом натискання кнопки **Full View Analysis** панелі інструментів (рис. 4.2).

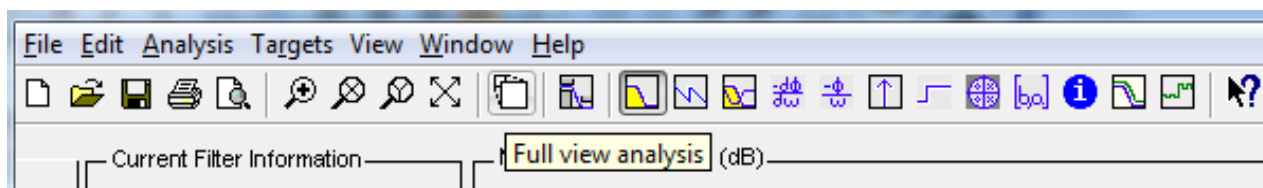


Рис. 4.2. Панель інструментів вікна
Filter Design & Analysis Tool

У вікні **Filter Visualization Tool**, що з'явилося (рис. 4.3), за допомогою відповідних кнопок панелі інструментів (2-й ряд кнопок) можна побачити АЧХ, ФЧХ, групову та фазову затримки, імпульсну характеристику, діаграму нулів і полюсів, значення коефіцієнтів передавальної функції та інші параметри спроектованого фільтра.

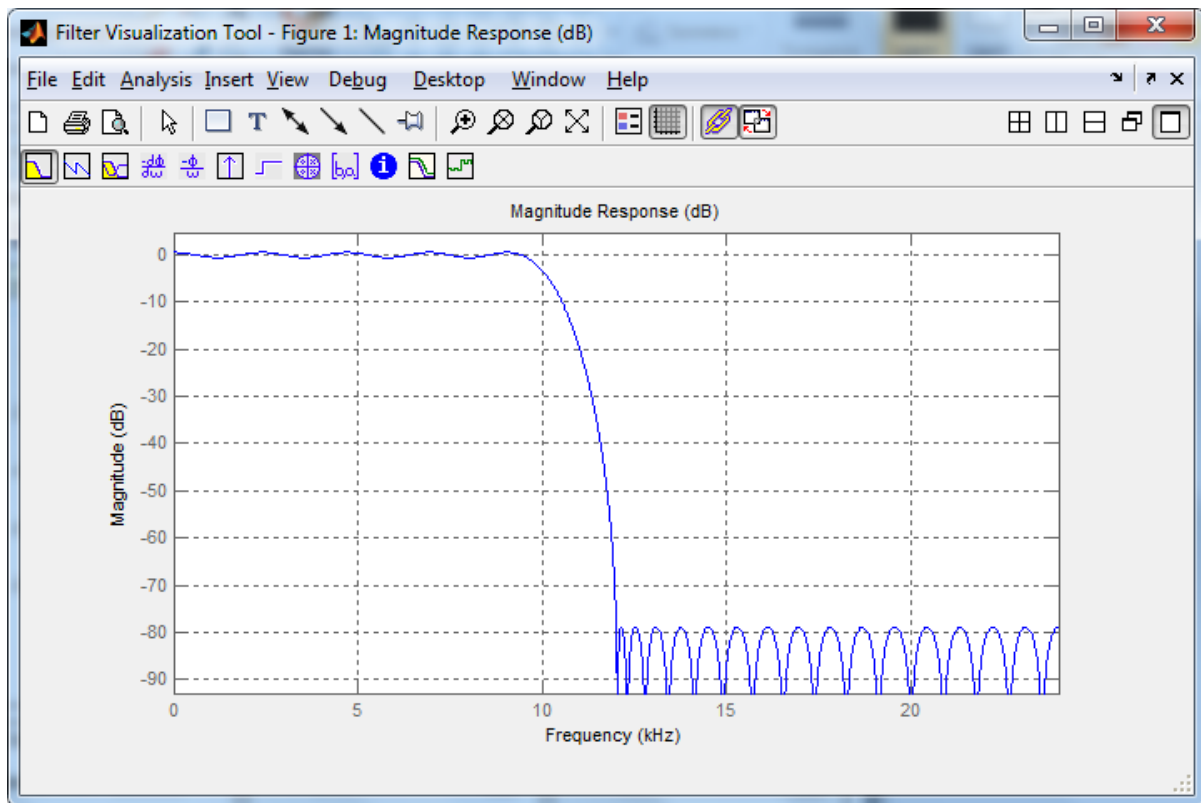


Рис. 4.3. Вікно Filter Visualization Tool

Аналогічні кнопки розташовані і на верхній панелі інструментів основного вікна пакета **FDATool** (рис. 4.1 і 4.2).

4.4. Експорт та імпорт опису фільтра

Спроекований раніше в робочому середовищі **MatLab** фільтр можна імпортувати в програму **FDATool**. Для цього в меню **File** необхідно вибрати підменю **Import Filter from Workspace**. В результаті з'явиться вікно, зображене на рис. 4.4.

Крім основного меню і панелі інструментів тут міститься поточна інформація про структуру фільтра, його порядок, стійкість (**Current Filter Information**); графік АЧХ (у дБ) (**Magnitude Response**), а також вкладка **Filter Coefficients** (коефіцієнти фільтра) для задання параметрів фільтра, який необхідно імпортувати. Розглянемо більш докладно поля вкладки **Filter Coefficients**.

У полі **Filter Structure** можна вибрати необхідну структуру реалізації ЦФ: Direct-Form I (пряма), Direct-Form II (канонічна), Direct-Form I Transposed (транспонована канонічна), Direct-Form II Transposed (транспонована пряма), Direct-Form FIR (пряма для СІХ)

та ін. За замовчуванням у цьому полі вказана структура Direct-Form II Transposed. Якщо необхідно імпортувати СІХ-фільтр, то в полі **Filter Structure** доцільно вибрати структуру Direct-Form FIR.

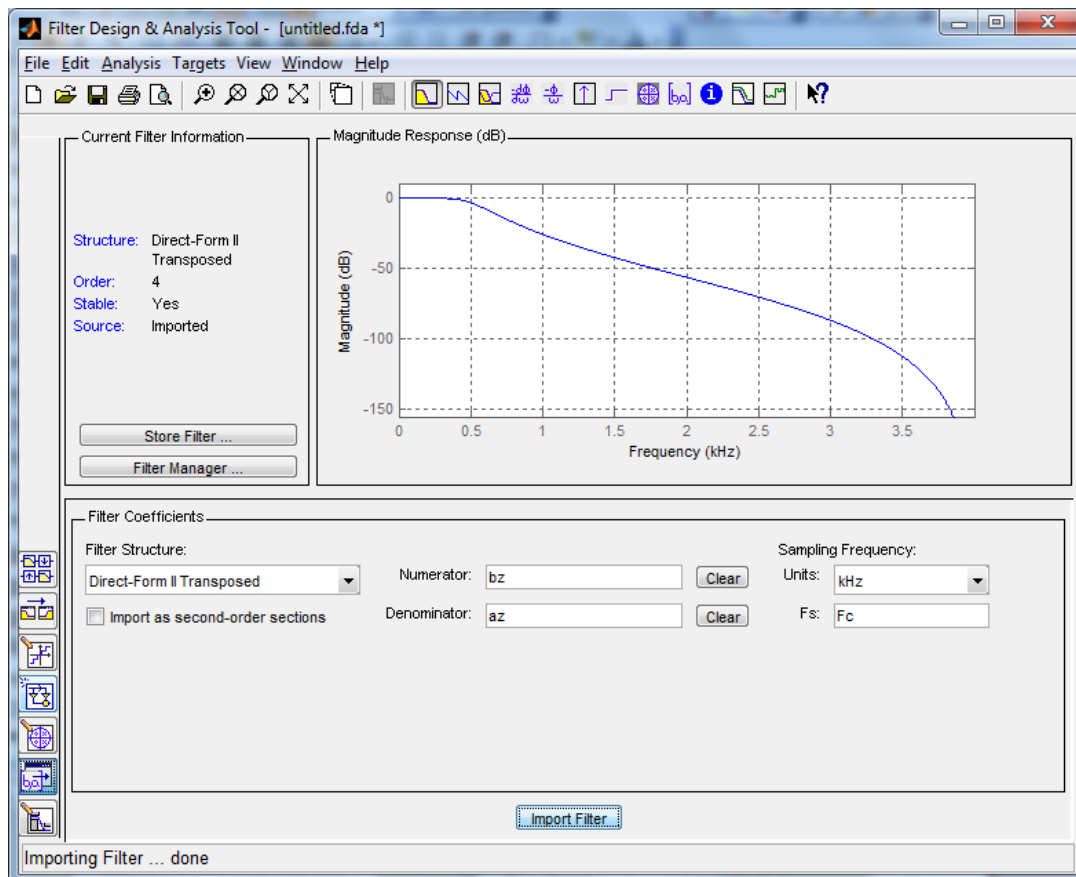


Рис. 4.4. Вікно програми Fdatool для імпорту фільтра

У полях введення вказуються коефіцієнти чисельника (**Numerator**) і знаменника (**Denominator**) передавальної функції фільтра. Список береться у квадратні дужки, значення коефіцієнтів поділяються пробілами. У поле **Sampling Frequency** необхідно ввести частоту дискретизації **F_s**, указавши одиницю виміру в полі **Units**.

Якщо вектори коефіцієнтів фільтра **bz** і **az**, а також частота дискретизації **F_s** уже існують у робочій області MatLab, то замість введення числових значень у відповідних полях вводу потрібно просто вказати імена змінних (рис. 4.4). Після натискання кнопки **Import Filter** можна переглядати характеристики фільтра.

Коефіцієнти будь-якого розробленого фільтра програмою **Fdatool** можна експортувати в блок **Simulink** (про пакет програм **Simulink** буде сказано нижче). Для цього в меню **File** необхідно вибрати підменю **Export to Simulink Model**. У вікні програми

FDATool, що з'явилося, (рис. 4.5) необхідно встановити прапорець **Build model using basic elements**.

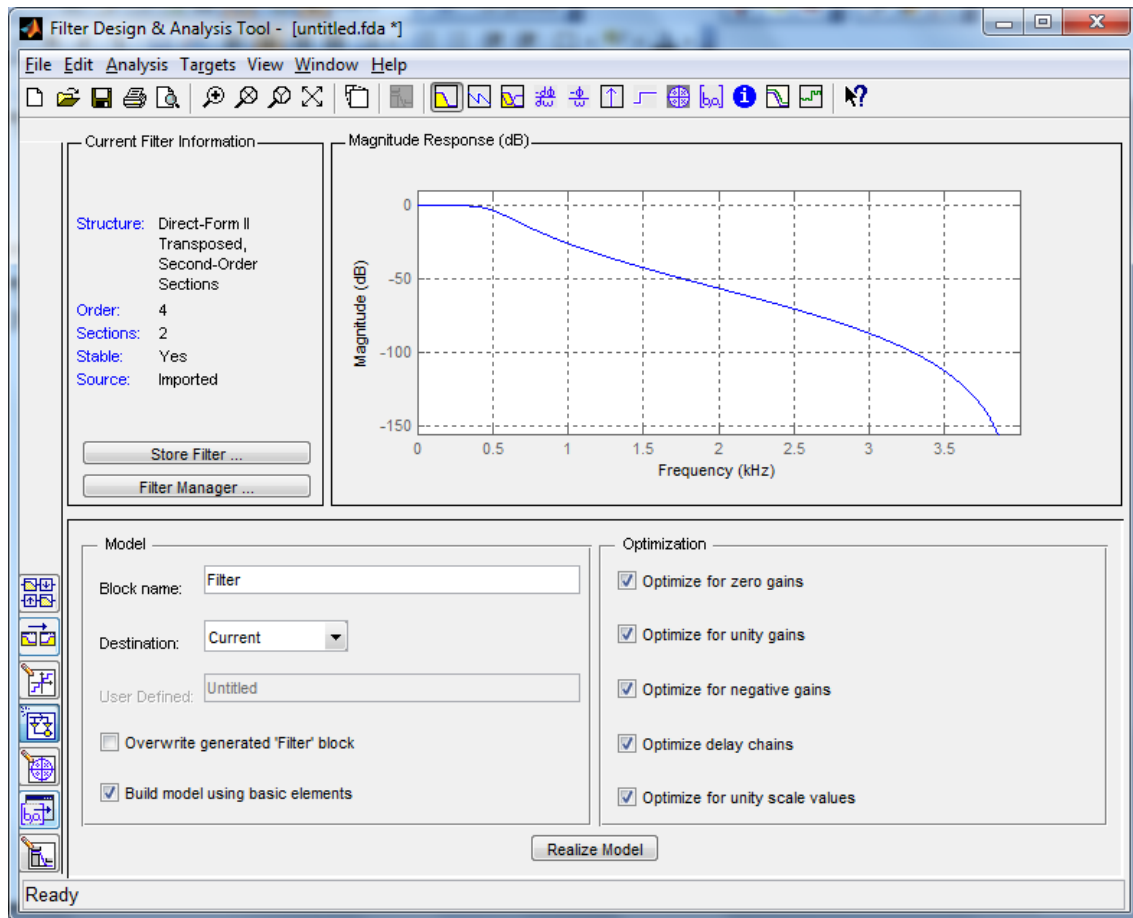


Рисунок 4.5 – Вікно програми FDATool для експорту фільтра

Після натискання кнопки **Realize Model** буде створений блок фільтра (рис. 4.6), який можна використовувати в пакеті програм **Simulink**.

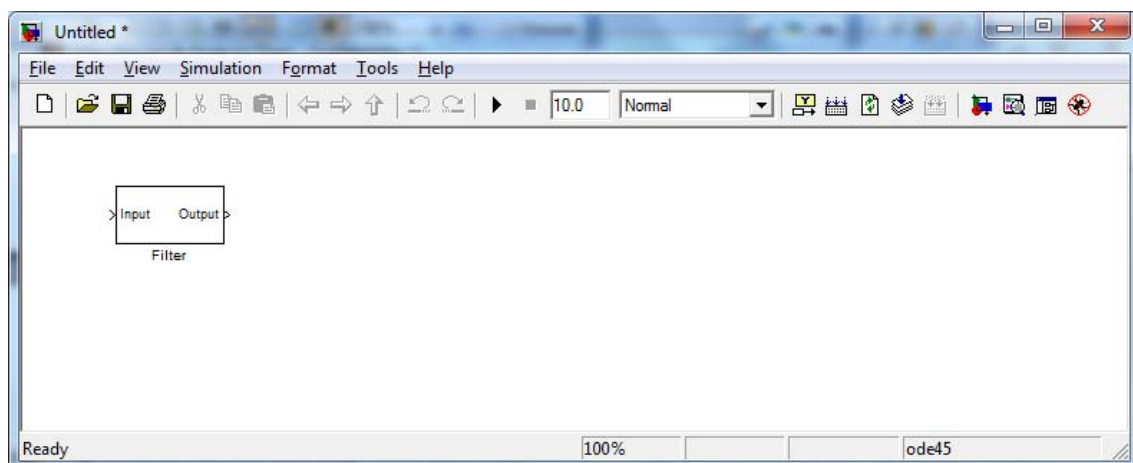


Рис. 4.6. Вікно редагування моделі

Якщо виконати подвійне клацання по блоку фільтра, то з'явиться вікно із зображенням структури фільтра (рис. 4.7).

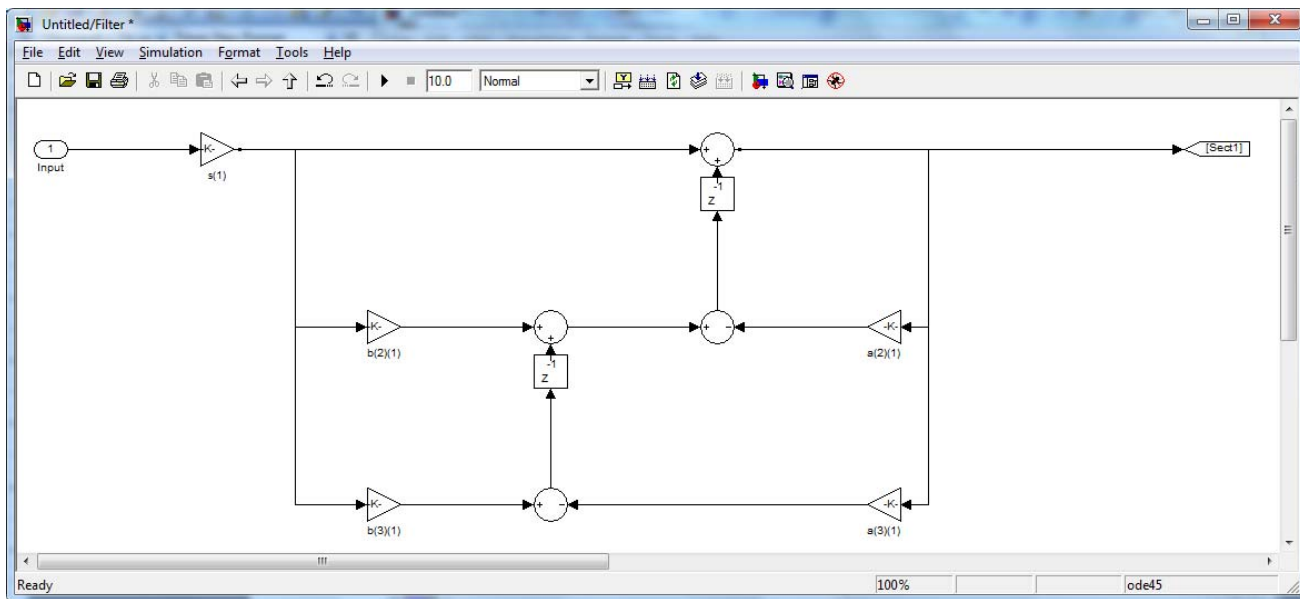


Рис. 4.7. Структура спроектованого фільтра


4.5. Характеристика пакета Simulink

Програма **Simulink** є додатком до пакета **MatLab**. При моделюванні з використанням **Simulink** реалізується принцип візуального програмування, у відповідності з яким користувач на екрані з бібліотеки стандартних блоків створює модель пристрою і здійснює розрахунки. При цьому, на відміну від класичних способів моделювання, користувачу не потрібно досконально вивчати мову програмування та числові методи математики, а достатньо загальних знань, що необхідні при роботі на комп'ютері і, природно, знань тієї предметної галузі, у якій він працює.

Simulink є досить самостійним інструментом **MatLab** і при роботі з ним зовсім не потрібно знати сам **MatLab** та інші його додатки. З іншого боку, доступ до функцій **MatLab** та інших його інструментів залишається відкритим і їх можна використовувати в **Simulink**. Частина пакетів, що входять до складу, має інструменти, які вбудовуються в **Simulink**. Є також додаткові бібліотеки блоків для різних сфер застосування (наприклад, Power System Blockset – моделювання електротехнічних пристроїв, Digital Signal Processing Blockset – набір блоків для розробки цифрових пристроїв і т.д.).

При роботі з **Simulink** користувач має можливість модернізувати бібліотечні блоки, створювати свої власні, а також складати нові бібліотеки блоків. При моделюванні користувач може вибирати спосіб зміни модельного часу (з фіксованим або змінним кроком). Під час моделювання є можливість стежити за процесами, що відбуваються в системі. Для цього використовуються спеціальні пристрої спостереження, що входять до складу бібліотеки **Simulink**. Результати моделювання можуть бути подані у вигляді графіків або таблиць.

Запуск **Simulink** можна зробити одним із трьох способів:

- натиснути кнопку  (Simulink) на панелі інструментів **MatLab**;
- у рядку командного вікна **MatLab** виконати команду **simulink**;
- виконати команду **Open...** меню **File** і відкрити файл моделі (mdl-файл).

Останній спосіб кращий при запуску вже готової й налагодженої моделі, коли потрібно лише провести моделювання і не потрібно додавати нові блоки в модель. При застосуванні двох перших способів відкривається вікно оглядача бібліотеки блоків (рис. 4.8).

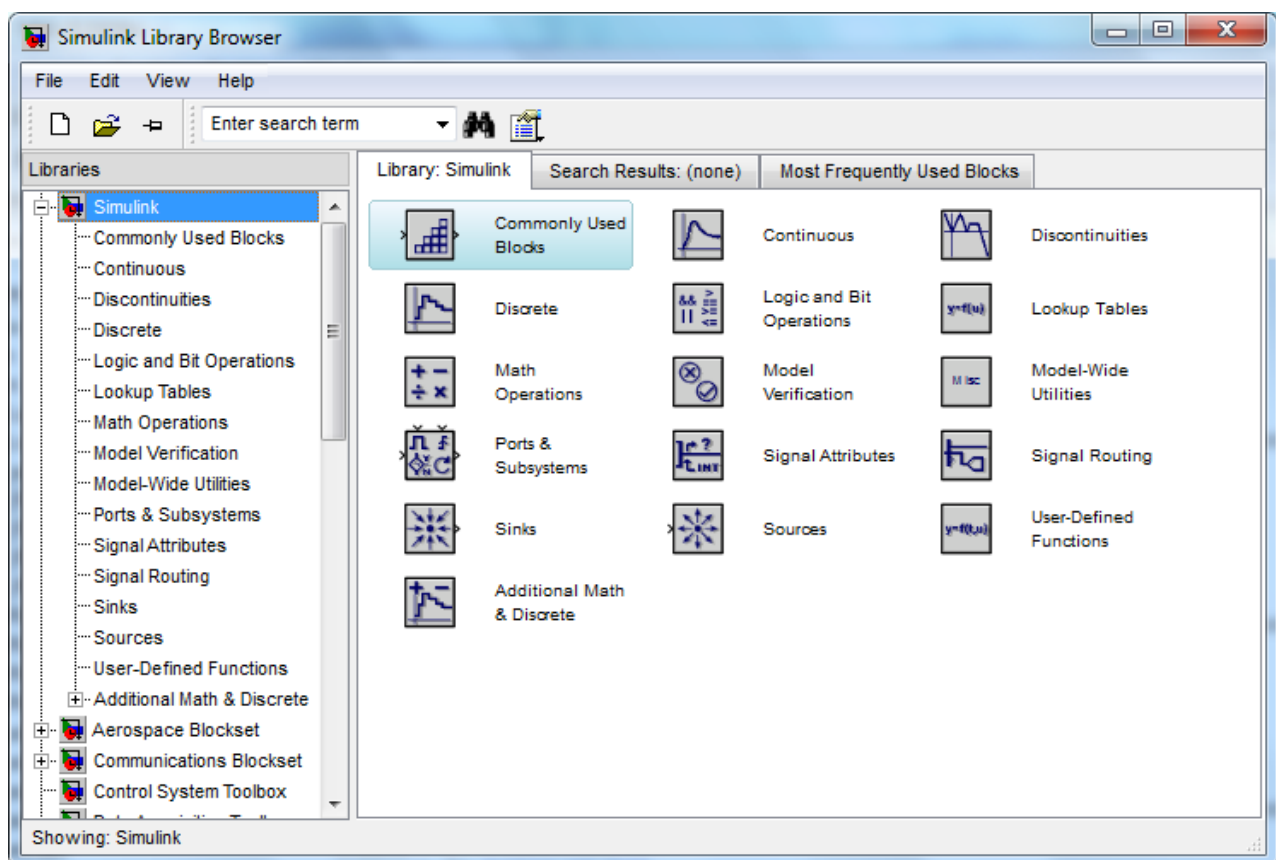


Рис. 4.8. Вікно оглядача бібліотеки блоків Simulink

4.6. Оглядач бібліотеки блоків

Вікно оглядача бібліотеки блоків **Simulink Library Browser** містить такі елементи: заголовок із назвою вікна (Simulink Library Browser); панель меню (File, Edit, View, Help); панель інструментів із кнопками найбільш часто використовуваних опцій меню; вікно назви вибраного розділу бібліотеки; список розділів бібліотеки; вікно для виведення вмісту розділу бібліотеки (список підрозділів або блоків бібліотеки); рядок стану оглядача.

На рис. 4.8 виділено бібліотеку системи **Simulink** (у лівій частині вікна) і показано її розділи (у правій частині вікна). Бібліотека системи **Simulink** містить такі розділи:

- Continuous – блоки аналогових елементів;
- Discontinuous – блоки нелінійних елементів;
- Discrete – блоки дискретних елементів;
- Look-Up Tables – блоки таблиць;
- Math Operations – блоки елементів математичних операцій;
- Model Verification – блоки перевірки властивостей сигналів;
- Model-Wide Utilities – розділ додаткових утиліт;
- Ports&Subsystems – порти та підсистеми;
- Signal Attributes – блоки задання властивостей сигналів;
- Signal Routing – блоки маршрутизації сигналів;
- Sinks – блоки прийому та відображення сигналів;
- Sources – блоки джерел сигналу;
- User-Defined Function – функції, визначені користувачем.

Список розділів бібліотеки **Simulink** поданий у вигляді дерева і правила роботи з ним є загальними для списків такого виду.

При виборі відповідного розділу бібліотеки його вміст відображається в правій частині вікна.

4.7. Створення моделі

Для створення моделі в середовищі **Simulink** необхідно послідовно виконати ряд дій.

1) *Створити новий файл моделі* (вибрати команду **File/New/Model** або натиснути відповідну кнопку на панелі інструментів).

2) *Розташувати блоки у вікні моделі.* Для цього необхідно відкрити відповідний розділ бібліотеки. Далі, указавши курсором на необхідний блок і натиснувши на ліву клавішу миші, «перетягнути» блок у створене вікно. Для видалення блока необхідно вибрати блок (указати курсором на його зображення і натиснути ліву клавішу миші), а потім натиснути клавішу Delete на клавіатурі.

3) Для *зміни параметрів блока*, які встановлені за замовчуванням, необхідно двічі клацнути лівою клавішею миші, указавши курсором на зображення блока. Відкриється вікно параметрів цього блока. При введенні числового значення параметра як десяткового розділювача повинна використовуватися крапка, а не кома. Після внесення змін закрити вікно кнопкою ОК. Можна також, не закриваючи вікна, скористатися кнопкою Apply для збереження змін.

4) Після установки на схемі всіх блоків потрібно *виконати їхнє з'єднання*. Для цього необхідно вказати курсором на вихід блока, а потім натиснути і, не відпускаючи ліву клавішу миші, провести лінію до входу іншого блока та відпустити клавішу. Якщо з'єднання не створене, то лінія зв'язку буде пунктирною і мати червоний колір. У випадку правильного з'єднання лінія зв'язку буде суцільною. Для створення лінії зв'язку можна також виділити блок-джерело сигналу, потім натиснути клавішу Ctrl й виділити блок-приймач. Для створення точки розгалуження в сполучній лінії потрібно підвести курсор до передбачуваного вузла і, натиснувши праву клавішу миші, протягнути лінію. Для видалення лінії потрібно виділити її, а потім натиснути клавішу Delete.

5) Після складання розрахункової схеми необхідно *зберегти її у вигляді файлу на диску* (пункт меню **File/Save As...** у вікні схеми). Ім'я файлу може бути довільної довжини, але має починатися з букви і містити тільки алфавітно-цифрові символи латиниці та знаки підкреслення. При наступному редагуванні схеми можна користуватися пунктом меню **File/Save**. При повторних запусках програми **Simulink** завантаження схеми здійснюється за допомогою меню **File/Open...** у вікні оглядача бібліотеки блоків або з командного вікна системи **MatLab**.

На рис. 4.9 наведено приклад моделі. У цій моделі використовуються 2 генератори синусоїдальних сигналів. Один генератор задає синусоїду із частотою 0,2 Гц і амплітудою 5 (рис. 4.10), а інший – із частотою 20 Гц і амплітудою 3.

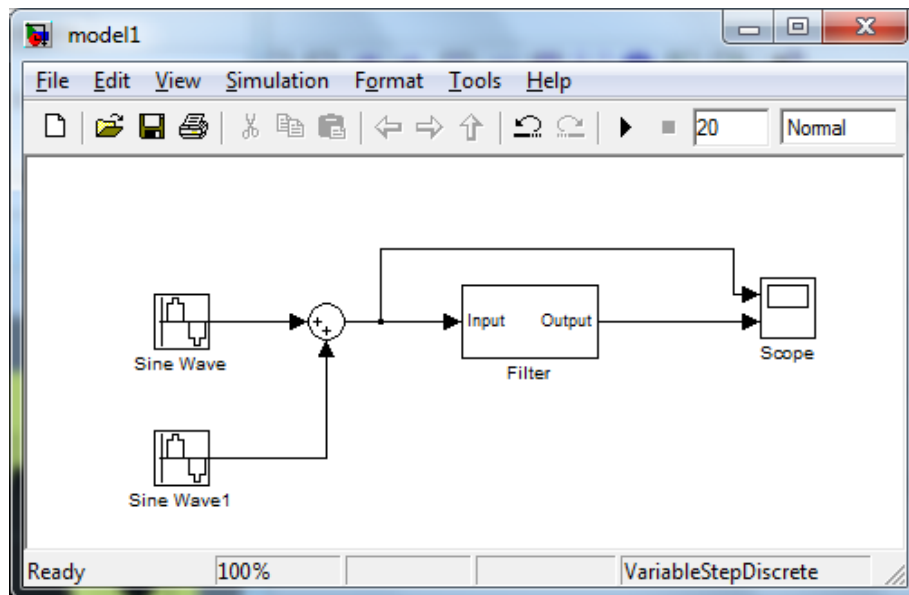


Рис. 4.9. Модель, створена зі стандартних блоків Simulink і блока фільтра, експортованого із програми DFATool

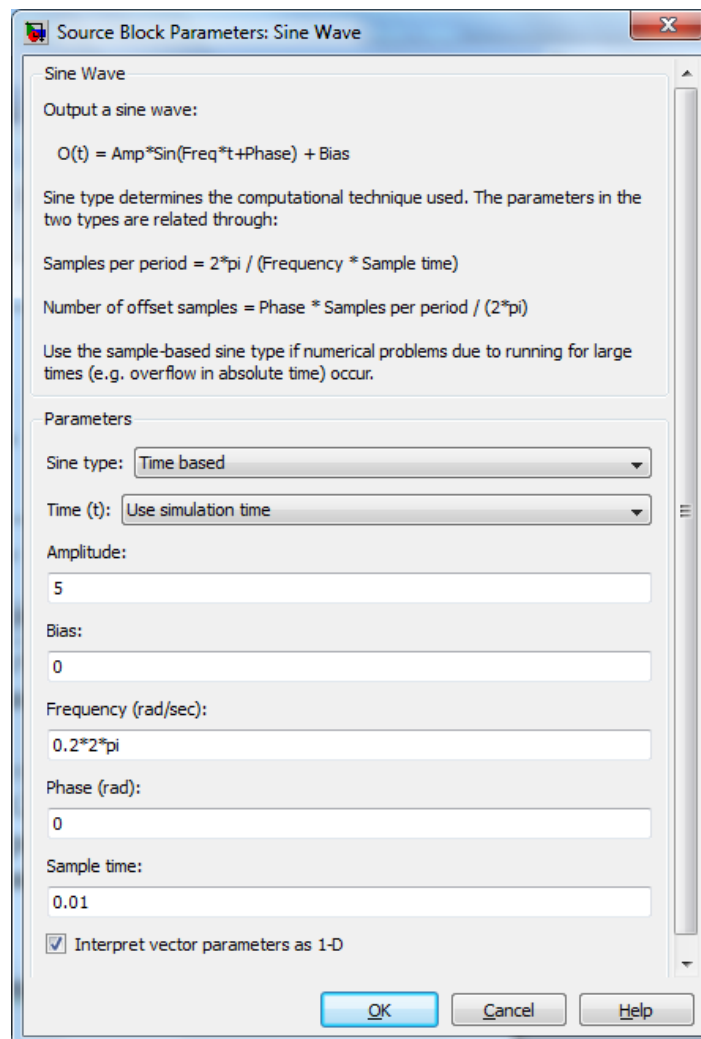


Рис. 4.10. Вікно налаштування параметрів генератора синусоїдального сигналу

4.8. Установка параметрів моделювання

Перш ніж запустити завантажену модель, потрібно ознайомитися з установкою загальних параметрів моделювання. Для цього виконаємо команду **Configuration Parameters...** у меню **Simulation** вікна з зображенням моделі. З'явиться вікно установки параметрів моделювання (рис. 4.11). Це вікно має ряд вкладок з великою кількістю параметрів. За замовчуванням відкривається вкладка **Solver**, яка дозволяє встановити параметри розв'язувального пристрою системи моделювання **Simulink**. До найважливіших параметрів розв'язувача належить час моделювання – **Simulation time**. Він задається початковим часом **Start time** (зазвичай 0) і кінцевим часом **Stop time** (на рис. 4.11 нескінченність **inf**). Рівність **Stop time** нескінченності означає, що моделювання буде відбуватися нескінченно довго, поки ми не перервемо його. Однак у цьому випадку важко отримати розрізнені осцилограми роботи пристрою, тому рекомендується задавати кінцеві значення **Stop time**.

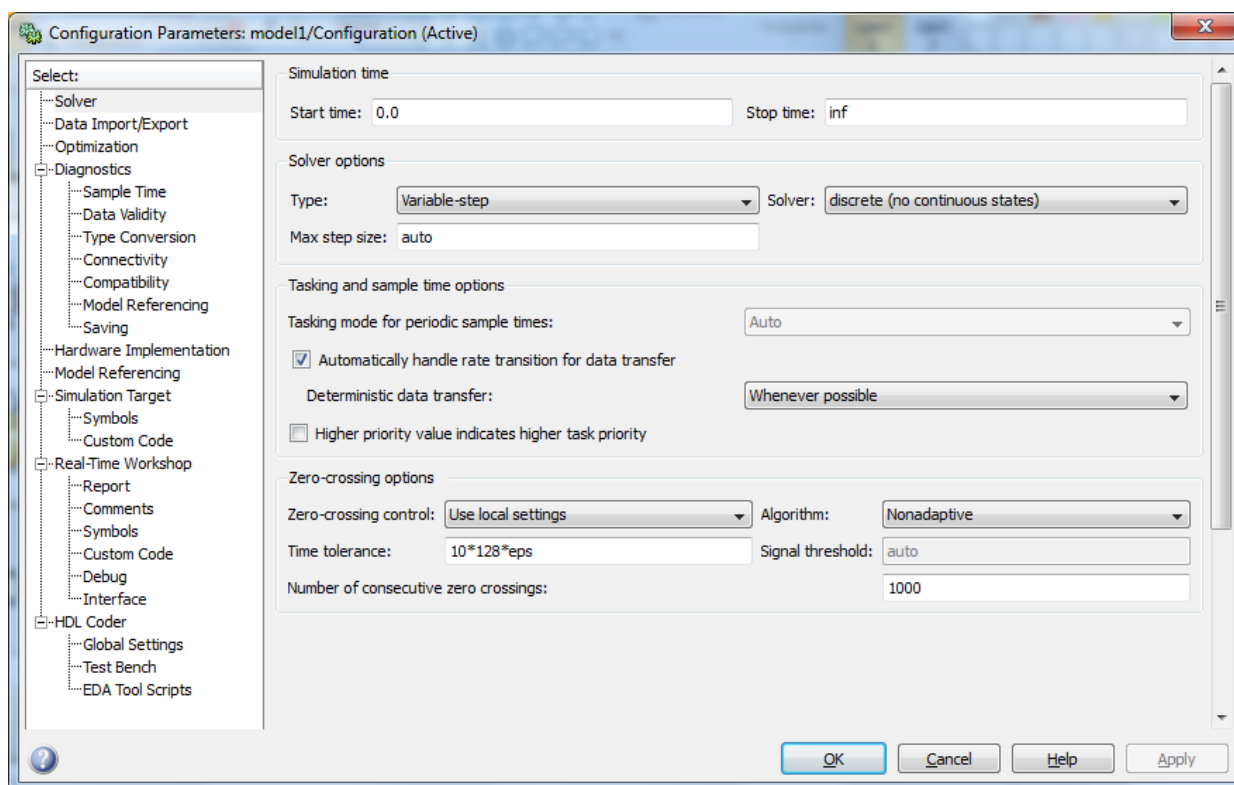


Рис. 4.11. Вікно установки параметрів моделювання

Необхідно відзначити, що час моделювання – величина достатньо умовна. Точної відповідності між часом моделювання в

секундах і заданим значенням немає (**Stop time** = 50 не означає моделювання протягом 50 с). Реальний час моделювання сильно залежить від швидкодії комп'ютера, на якому виконується моделювання. Інші параметри розглянуті не будуть, тому що вони не впливають на виконання РГЗ.

4.9. Запуск процесу моделювання

Наприкінці панелі інструментів **Simulink** знаходяться дві кнопки керування моделюванням. Одна з них, у вигляді чорного трикутника (**Start/Pause Simulation**), запускає або припиняє розпочатий процес моделювання, а інша, у вигляді чорного квадрата (**Stop**), зупиняє його. Усе, що потрібно для запуску моделювання – це натиснути кнопку із зображенням трикутника. На рис. 4.12 показаний результат запуску моделі, зображеної на рис. 4.9. Замість кнопок можна використовувати команди **Start** і **Pause** у меню **Simulation** вікна моделі.

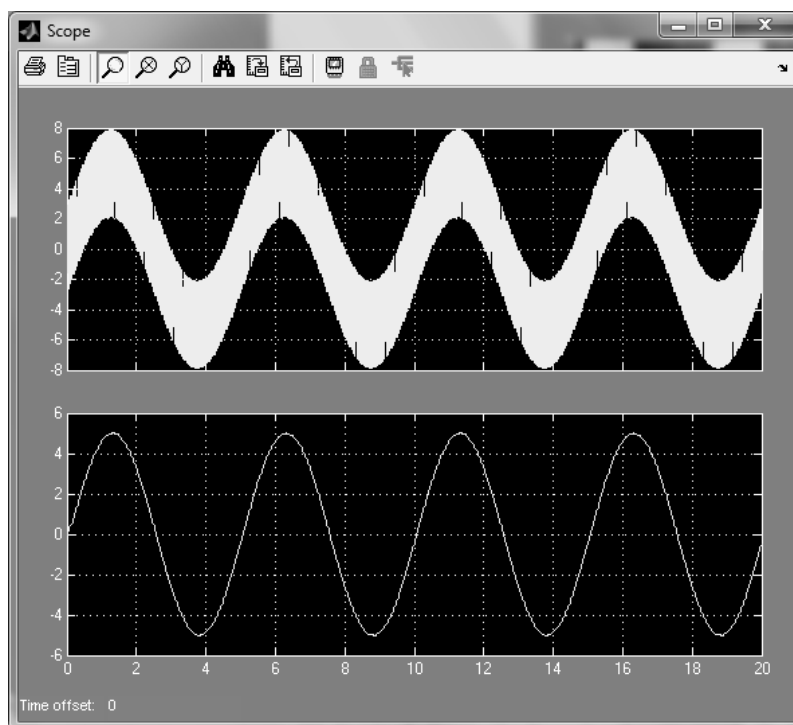


Рис. 4.12. Приклад результату роботи моделі

У цьому випадку результати моделювання подано у вигляді зашумленого сигналу і сигналу після фільтрації, побудованих за допомогою віртуального осцилографа (блок **Scope**). Потрібно зазна-

чити, що у блока Scope за замовчуванням один вхід. Для додавання потрібної кількості входів на панелі інструментів вікна **Scope** необхідно натиснути кнопку **Parameters**. У вікні, що з'явилося, (рис. 4.13) в полі **Number of axes** необхідно вказати кількість вхідних сигналів.

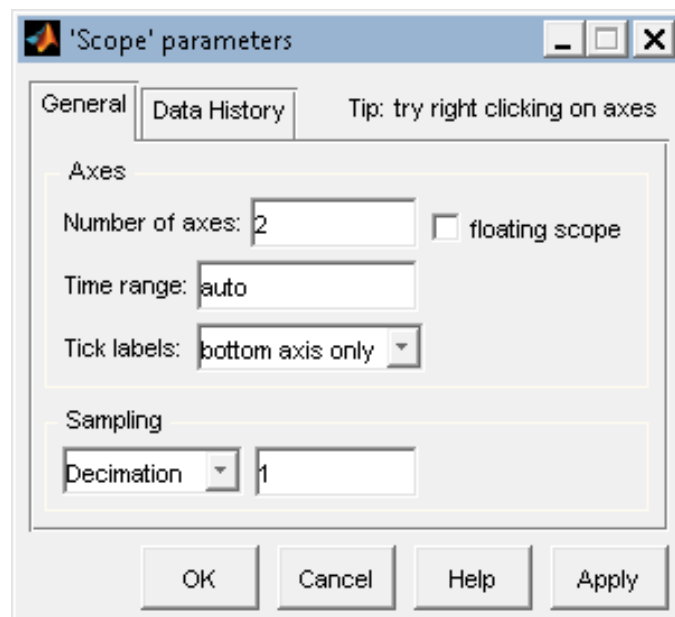


Рис. 4.13. Вікно налаштування параметрів віртуального осцилографа

Контрольні запитання

?

1. Які можливості є у пакеті FDATool для проектування цифрових фільтрів?
2. Як задати специфікацію цифрового фільтра у пакеті FDATool?
3. Які характеристики спроектованого ЦФ можна відобразити у пакеті FDATool?
4. Як виконати імпорт фільтра, спроектованого в робочому середовищі MatLab, в програму FDATool?
5. Як виконати експорт спроектованого цифрового фільтра в блок пакета програм Simulink?
6. Як переглянути структуру спроектованого фільтра?
7. Як створити модель фільтрації сигналу спроектованим фільтром в пакеті Simulink?
8. Як змінити параметри блоків?
9. Як установити параметри моделювання в пакеті Simulink?

ДОДАТОК А

Розрахунково-графічне завдання

Мета розрахунково-графічного завдання (РГЗ) – набуття практичних навичок проектування нерекурсивних і рекурсивних фільтрів за заданою специфікацією та цифровою фільтрацією сигналів.

1) Відповідно до номера M по журналу виберіть 3 вагові функції (табл. А.1). Довжину вікна обчислити за виразом $N = 60 + m$, де m – номер по журналу. Побудуйте їх у часовій і частотній ділянках. Виконайте виведення віконних функцій за допомогою прикладу №1.1. Проведіть порівняльний аналіз досліджуваних вагових функцій. Порівняйте частотні характеристики досліджуваних вагових функцій з АЧХ прямокутного вікна.

Таблиця А.1

Варіанти вагових вікон

M	Вікно 1	Вікно 2	Вікно 3	
			ім'я	параметр
1	2	3	4	5
1	трикутне	Бартлетта – Ханна	Кайзера	0,5
2	Бартлетта	Блекмана – Харріса	Чебишева	100
3	Ханна	Бохмана	Гаусса	1
4	Хеммінга	Натолла	Кайзера	1
5	Блекмана	Тьюкі	Чебишева	120
6	Бартлетта – Ханна	Блекмана	Гаусса	1,5
7	Блекмана – Харріса	Хеммінга	Кайзера	2
8	Бохмана	Ханна	Чебишева	130
9	Натолла	Бартлетта	Гаусса	2
10	Тьюкі	трикутне	Кайзера	3
11	трикутне	Бартлетта – Ханна	Чебишева	140
12	Бартлетта	Блекмана – Харріса	Гаусса	2,5
13	Ханна	Бохмана	Кайзера	4
14	Хеммінга	Натолла	Чебишева	150
15	Блекмана	Тьюкі	Гаусса	3
16	Бартлетта – Ханна	Блекмана	Кайзера	5
17	Блекмана – Харріса	Хеммінга	Чебишева	160
18	Бохмана	Ханна	Гаусса	3,5
19	Натолла	Бартлетта	Кайзера	6
20	Тьюкі	трикутне	Чебишева	170
21	трикутне	Бартлетта – Ханна	Гаусса	4
22	Бартлетта	Блекмана – Харріса	Кайзера	7

1	2	3	4	5
23	Ханна	Бохмана	Чебишева	180
24	Хеммінга	Натолла	Гаусса	4,5
25	Блекмана	Тьюкі	Кайзера	8
26	Бартлетта – Ханна	Блекмана	Чебишева	190
27	Блекмана – Харріса	Хеммінга	Гаусса	5
28	Бохмана	Ханна	Кайзера	9

2) У відповідності з номером по журналу M виберіть специфікацію СІХ-фільтра (табл. А.2). Для всіх типів фільтрів нерівномірність у смузі пропускання дорівнює 1 дБ.

Таблиця А.2

Специфікації СІХ-фільтрів для проектування

M	Тип ЦФ	Нижня частота зрізу, Гц	Верхня частота зрізу, Гц	Ширина смуги переходу Δf , Гц	Загасання в смузі заглушення A_s , дБ	Частота дискретизації f_c , кГц
1	2	3	4	5	6	7
1	ФНЧ	5500	—	400	30	30
2	ФВЧ	—	6000	300	35	30
3	СФ	3000	6000	350	40	30
4	РФ	3500	7500	450	45	30
5	ФНЧ	800	—	250	50	15
6	ФВЧ	—	1000	300	55	15
7	СФ	800	1000	280	60	15
8	РФ	600	1600	320	65	15
9	ФНЧ	1200	—	550	70	25
10	ФВЧ	—	3000	600	75	25
11	СФ	2000	4000	650	80	25
12	РФ	1500	5000	700	85	25
13	ФНЧ	3600	—	2750	30	35
14	ФВЧ	—	2350	350	35	35
15	СФ	1800	2500	400	40	35
16	РФ	1600	4500	500	45	35
17	ФНЧ	2500	—	200	50	10
18	ФВЧ	—	1500	300	55	10
19	СФ	1500	2000	250	60	10
20	РФ	1300	2300	300	65	10
21	ФНЧ	600	—	500	70	20
22	ФВЧ	—	2000	600	75	20
23	СФ	2000	6000	700	80	20

1	2	3	4	5	6	7
24	РФ	2000	3000	800	85	20
25	ФНЧ	1000	—	350	30	40
26	ФВЧ	—	3000	500	35	40
27	СФ	1500	3500	500	40	40
28	РФ	2500	5000	800	45	40

3) Згідно з обраною специфікацією спроектуйте методом зважування СІХ-фільтр із мінімальним порядком фільтра. Для цього визначте мінімальний порядок фільтра, виконайте розрахування коефіцієнтів СІХ-фільтра за допомогою пакета MATLAB. Побудуйте ІХ та АЧХ спроектованого фільтра (див. приклади розділу 2).

4) Відповідно до номера по журналу M виберіть специфікацію НІХ-фільтра (табл. А.3).

Таблиця А.3

Специфікації НІХ-фільтрів для проектування

M	Тип ЦФ	Нижня частота зрізу, Гц	Верхня частота зрізу, Гц	Δf , Гц	A_s , дБ	f_c , кГц	Аналоговий фільтр-прототип
1	2	3	4	5	6	7	8
1	ФНЧ	5500	—	400	30	30	Баттерворта
2	ФВЧ	—	6000	300	35	30	еліптичний
3	СФ	3000	6000	350	40	30	Чебишева 1
4	РФ	3500	7500	450	45	30	Чебишева 2
5	ФНЧ	800	—	250	50	15	еліптичний
6	ФВЧ	—	1000	300	55	15	Чебишева 1
7	СФ	800	1000	280	60	15	Чебишева 2
8	РФ	600	1600	320	65	15	Баттерворта
9	ФНЧ	1200	—	550	70	25	Чебишева 1
10	ФВЧ	—	3000	600	75	25	Чебишева 2
11	СФ	2000	4000	650	80	25	Баттерворта
12	РФ	1500	5000	700	85	25	еліптичний
13	ФНЧ	3600	—	2750	30	35	Чебишева 2
14	ФВЧ	—	2350	350	35	35	Баттерворта
15	СФ	1800	2500	400	40	35	еліптичний
16	РФ	1600	4500	500	45	35	Чебишева 1
17	ФНЧ	2500	—	200	50	10	Баттерворта
18	ФВЧ	—	1500	300	55	10	еліптичний
19	СФ	1500	2000	250	60	10	Чебишева 1
20	РФ	1300	2300	300	65	10	Чебишева 2

1	2	3	4	5	6	7	8
21	ФНЧ	600	–	500	70	20	еліптичний
22	ФВЧ	–	2000	600	75	20	Чебишева 1
23	СФ	2000	6000	700	80	20	Чебишева 2
24	РФ	2000	3000	800	85	20	Баттерворта
25	ФНЧ	1000	–	350	30	40	Чебишева 1
26	ФВЧ	–	3000	500	35	40	Чебишева 2
27	СФ	1500	3500	500	40	40	Баттерворта
28	РФ	2500	5000	800	45	40	еліптичний

Для всіх типів фільтрів нерівномірність у смузі пропускання дорівнює 1 дБ. Як метод дискретизації використовуйте метод білінійного перетворення.

5) Виконайте розрахунок ПФ НІХ-фільтра мінімального порядку за допомогою пакета MATLAB. Побудуйте АЧХ, ФЧХ, графіки групової та фазової затримок, а також діаграму нулів і полюсів спроектованого фільтра (див. приклади розділу 3).

6) У відповідності з індивідуальним завданням п. 2 (табл. А.2) за допомогою програми **FDATool** спроектуйте СІХ-фільтр. Спроектувати фільтр можна одним із двох способів: або шляхом задання характеристик фільтра в інтерактивному режимі у вікні програми **FDATool**, або шляхом імпорту фільтра з робочого середовища **MatLab**. У другому випадку спочатку потрібно запустити *m*-файл, для того щоб розрахувати коефіцієнти фільтра, а потім виконати імпорт отриманого фільтра. Виведіть ІХ та АЧХ спроектованого СІХ-фільтра і порівняйте з характеристиками, отриманими в п. 3.

7) Виконайте експорт спроектованого фільтра в **Simulink**. У середовищі **Simulink** побудуйте схему, зображену на рис. 4.9.

8) Задайте такі параметри вхідних сигналів, щоб можна було продемонструвати роботу спроектованого фільтра (частота одного сигналу має бути в смузі пропускання спроектованого фільтра, а частота другого сигналу – поза смугою пропускання).

9) Відповідно до індивідуального завдання п. 4 (табл. А.3) за допомогою програми **FDATool** спроектуйте НІХ-фільтр (дії виконуються аналогічно до п. 6). За допомогою програми **FDATool** побудуйте ІХ, АЧХ, ФЧХ, групову та фазову затримки, діаграму нулів і полюсів. Порівняйте побудовані графіки із графіками, отриманими в п. 5.

10) Виконайте пп. 7 і 8 для спроектованого НІХ-фільтра.

11) Наведіть усі отримані результати у звіті.

ДОДАТОК Б

Приклад виконання розрахунково-графічного завдання

1) Дано: довжина вікна $N = 60$; вагові вікна Хеммінга, Ханна, Кайзера ($\alpha = 0,9$).

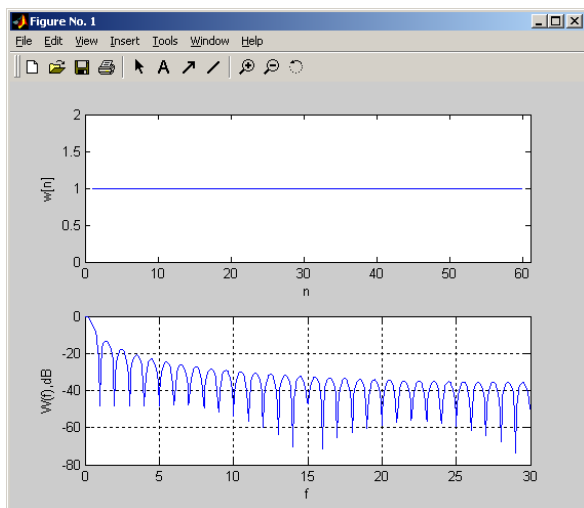
Програму для виведення графіків вагової функції та АЧХ наведено нижче (на рис. Б.1 подано результати роботи програми).

```
N=60; %довжина вікна
w=boxcar(N); %прямокутне вікно
% w=hamming(N); %вікно Хеммінга
% w=hann(N); %вікно Ханна
% w=kaiser(N, 0.9); % вікно Кайзера
subplot(2,1,1);
plot(w) % виведення вікна в часовій ділянці
xlim([0 61]);
xlabel('n');
ylabel('w[n]')
w=w/sum(w); % нормування коефіцієнтів
[W,f]=freqz(w,1); % z-перетворення
f=f*N/2/pi; % нормування частоти
% виведення АЧХ вікна в логарифмічному масштабі
subplot(2,1,2);
plot(f, 20*log10 (abs (W))), grid on,
xlabel('f');
ylabel('W(f),db');
```

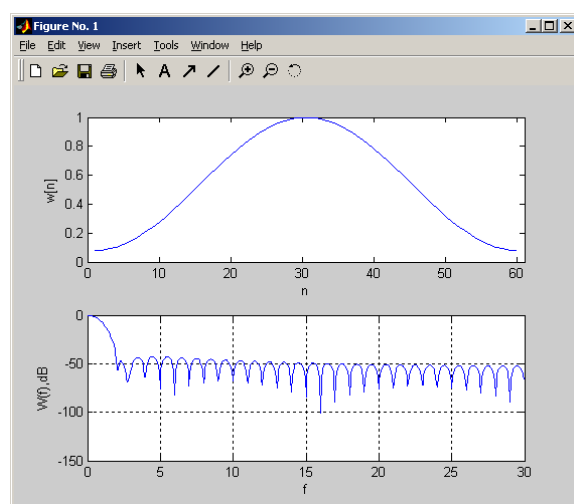
Далі повинні бути наведені висновки порівняння частотних характеристик вагових функцій.

2) Специфікацію проектованого СІХ-фільтра наведено в табл. Б.1.

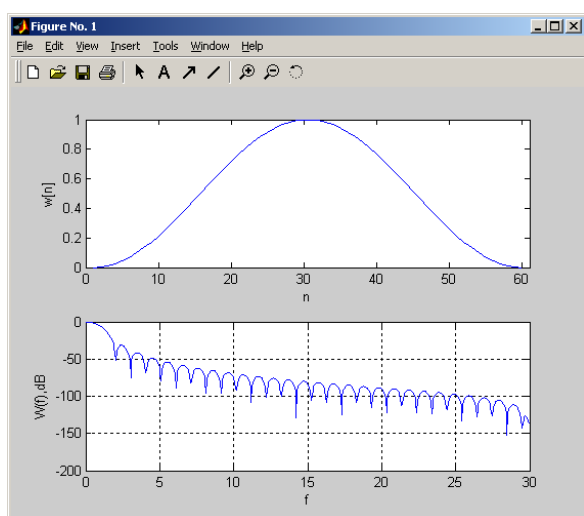
3) Частота Найквіста $f_N = f_c / 2 = 60 / 2 = 30$ кГц. Нормована ширина смуги переходу $\Delta f = 1 / 30$. Вимозі до загасання в смузі заглушення задовольняють функції Ханна, Хеммінга, Блекмана і Кайзера.



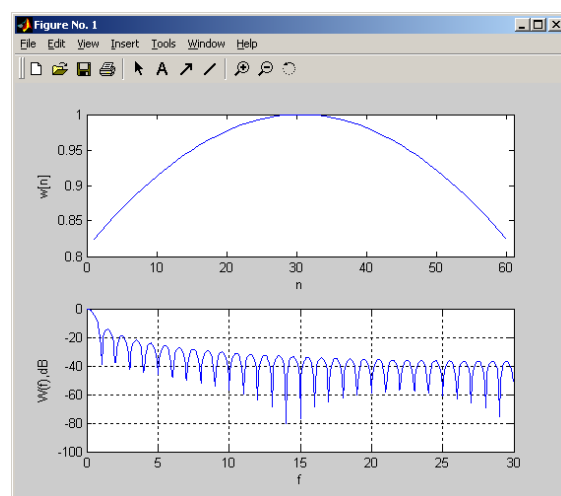
а



б



в



г

Рис. Б.1. Вагова функція та АЧХ вагового вікна: а – прямокутне вікно; б – вікно Хеммінга; в – вікно Ханна; г – вікно Кайзера

Таблиця Б.1

Параметри специфікації СІХ-фільтра

Тип ЦФ	Частота зрізу, кГц	Ширина смуги переходу Δf , кГц	Загасання в смузі заглушення A_s , дБ	Частота дискретизації f_c , кГц
ФНЧ	10	1	25	60

Для вікна Ханна $N \geq \frac{6,2}{\Delta f} = \frac{6,2}{1/30} = 186$, для вікна Хеммінга

$N \geq \frac{6,6}{\Delta f} = \frac{6,6}{1/30} = 198$, для вікна Блекмана $N \geq \frac{11}{\Delta f} = \frac{11}{1/30} = 330$ і для

вікна Кайзера $N \geq \frac{A-7,95}{7,18\Delta f} = \frac{25-7,5}{7,18 \cdot 1/30} = 73$. Таким чином, вікно

Кайзера дозволяє спроектувати фільтр із мінімальним порядком методом зважування. Отже, припустимо, що $N = 73$.

Оскільки $A_s = 25$ дБ і

$$\alpha = \begin{cases} 0, & A \leq 21, \\ 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21), & 21 < A < 50, \\ 0,1102(A-8,7), & A \geq 50, \end{cases}$$

то $\alpha = 0,5842(25-21)^{0,4} + 0,07886(25-21) = 1,33$.

Нижче наведено програму розрахунків коефіцієнтів проектного СІХ-фільтра, а також виведення ІХ та АЧХ (рис. Б.2).

```
Fp=10; %гранична частота смуги пропускання
df=1; %ширина смуги переходу
Fc=60; %частота дискретизації
FN=Fc/2; %частота Найквіста
fp=(Fp+df/2)/FN; %середина частоти зрізу (нормована)
N=73; % кількість коефіцієнтів фільтра
alfa=1.33;
n=0:N-1;
w=kaiser(N,alfa); %коефіцієнти вікна Кайзера
h=fir1(N-1,fp,w,'noscale'); %ІХ з використанням вікна Кайзера
[H,f]=freqz(h,1,512,Fc); %частотна характеристика
mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі
subplot(2,1,1);
stem(n/Fc,h); % виведення ІХ
xlabel('Time (mseconds)'),
ylabel('Amplitude')
subplot(2,1,2);
plot(f,mag), grid on; % виведення АЧХ
xlabel('Frequency (khz)'),
ylabel('Magnitude (db)')
```

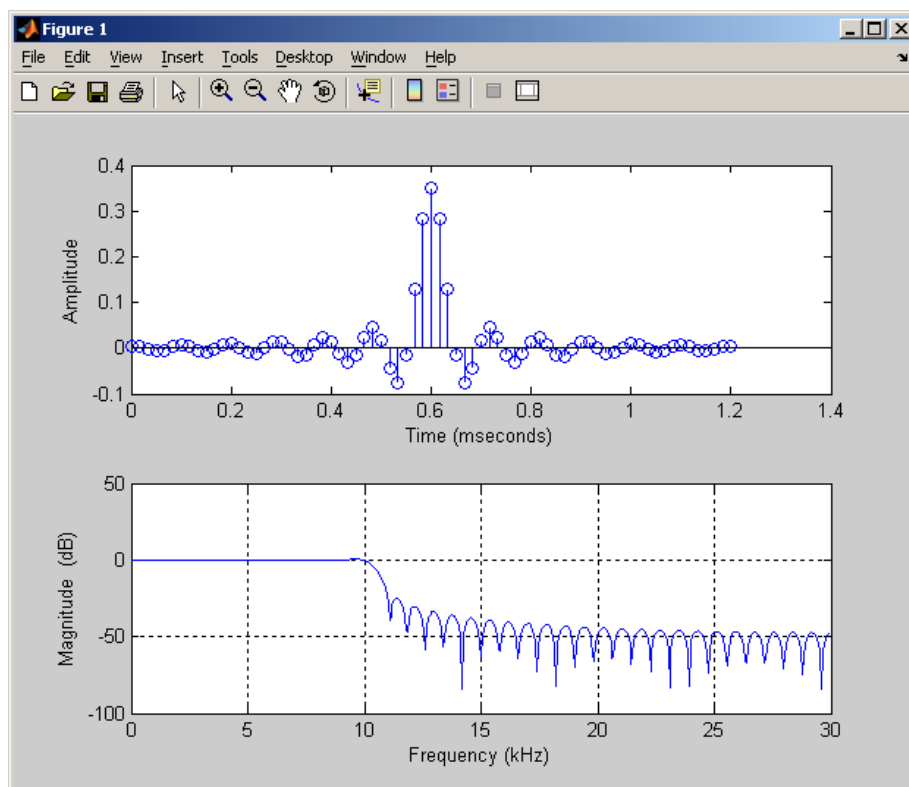


Рис. Б.2. ІХ та АЧХ низькочастотного СІХ-фільтра, отриманого методом зважування за допомогою вікна Кайзера

Отримана АЧХ (рис. Б.2) повністю задовольняє заданій специфікації фільтра.

4) Специфікацію проектованого НІХ-фільтра наведено в табл. Б.2.

Таблиця Б.2

Параметри специфікації НІХ-фільтра

Тип ЦФ	Частота зрізу, Гц	Δf , Гц	A_s , дБ	f_c , кГц	Аналоговий фільтр-прототип
ФНЧ	10000	1000	25	60	еліптичний

5) Нижче наведено програму розрахунку передавальної функції НІХ-фільтра мінімального порядку, а також виведення АЧХ, ФЧХ, графіків групової та фазової затримок, діаграми нулів і полюсів (рис. Б.3).

```

Fc=60; %частота дискретизації (кГц)
Fp=10; %частота зрізу (кГц)
Fs=11; %частота початку заглушення (кГц)
Ap=1; %нерівномірність у смузі пропускання
As=25; %загасання в смузі заглушення
FN=Fc/2; %частота Найквіста
wp=Fp/FN; %нормована частота зрізу
ws=Fs/FN; %нормована частота початку заглушення
[N,w]=ellipord(wp,ws,Ap,As); %визначення порядку фільтра
%розрахунки методом білінійного перетворення
[bz,az]=ellip(N,Ap,As,wp);
[H,f]=freqz(bz,az,512,Fc); %частотна характеристика
mag=20*log10(abs(H)); %АЧХ у логарифмічному масштабі
% виведення АЧХ
subplot(2,2,1);
plot(f,mag),
grid on;
xlabel('Frequency (khz)'),
ylabel('Magnitude (db)')
% виведення ФЧХ
subplot(2,2,3);
plot(f,unwrap(angle(H))),
grid on;
xlabel('Frequency (khz)'),
ylabel('Phase (radians)')
subplot(2,2,2);
gd = grpdelay(bz,az); %групова затримка
pd = -unwrap(angle(H))./f; %фазова затримка
%виведення групової та фазової затримок
plot(f,gd,f,pd,':'),
grid on;
legend('Group Delay','Phase Delay');
subplot(2,2,4);
zplane(bz,az); % виведення нулів і полюсів ПФ

```

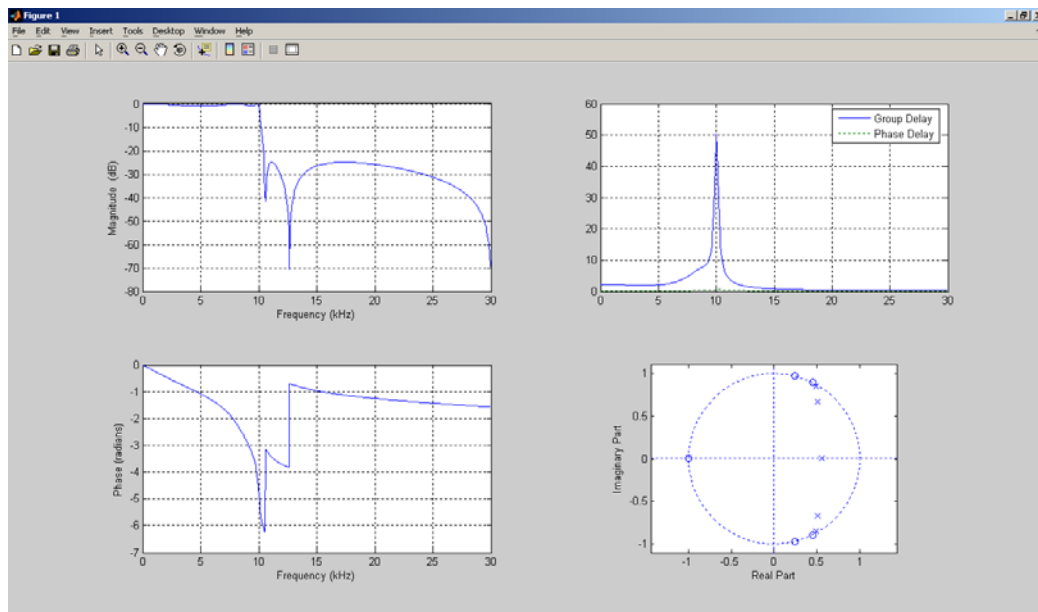



Рис. Б.3. Результати роботи програми розрахування низькочастотного НІХ-фільтра, отриманого методом білінійного перетворення

б) Задавши характеристики СІХ-фільтра у вікні програми **FDATool** (рис. Б.4), відповідні до заданої специфікації, в результаті проектування отримаємо ІХ та АЧХ фільтра, подані на рис. Б.5.

Порівняння результатів на рис. Б.2 і Б.5 показало, що результати ідентичні.

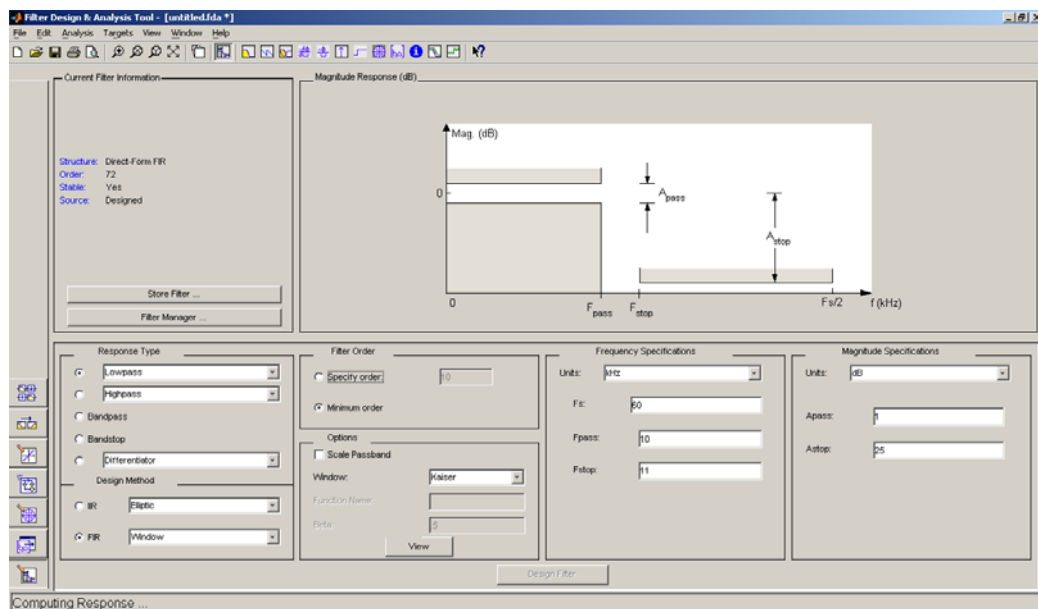


Рис. Б.4. Діалогове вікно програми FDATool із заданими параметрами проєктованого НІХ-фільтра

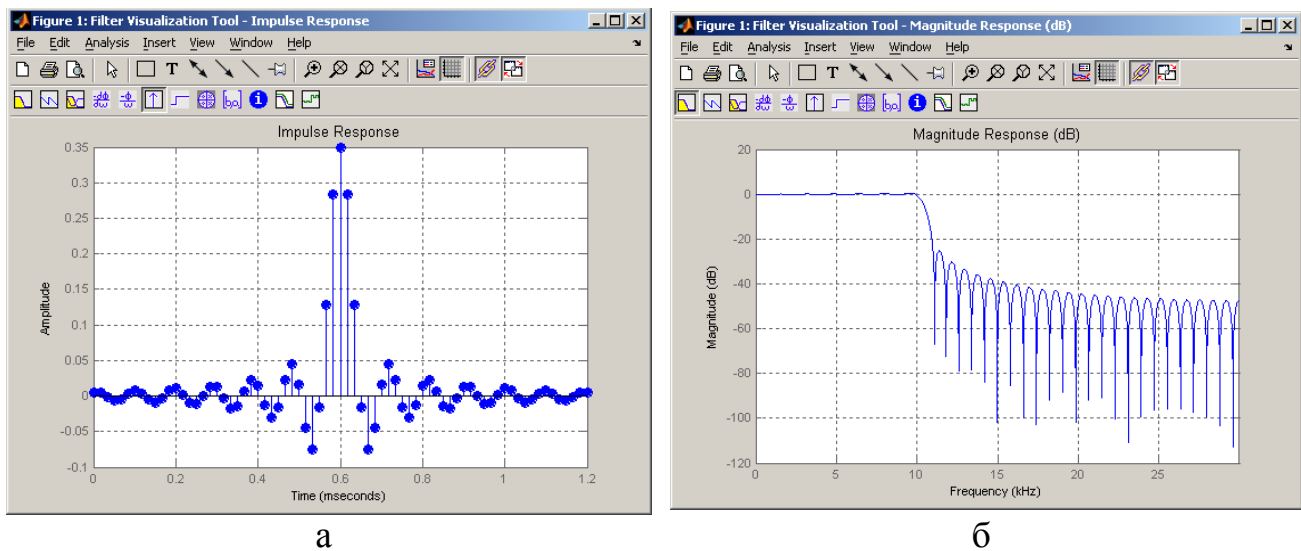


Рис. Б.5. ІХ та АЧХ низькочастотного СІХ-фільтра, отриманого методом зважування за допомогою вікна Кайзера в програмі FDATool

7) Після експорту спроектованого СІХ-фільтра в середовище Simulink було побудовано модель, зображену на рис. Б.6.

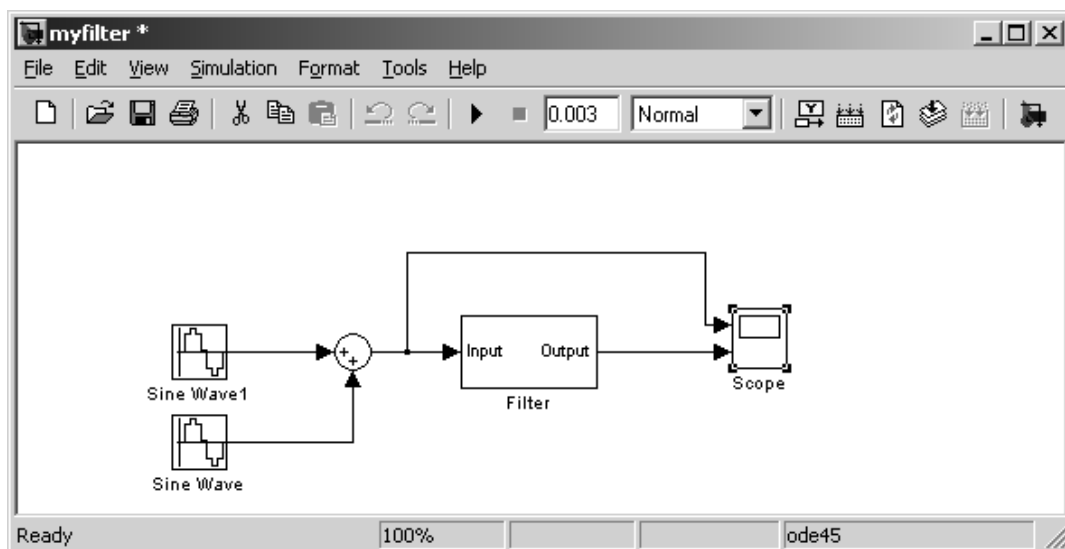


Рис. Б.6. Модель, створена зі стандартних блоків Simulink і блока СІХ-фільтра, експортованого із програми FDATool

8) Оскільки $f_c = 60$ кГц, то час дискретизації (Sample time) $t_c = 1/f_c = 1/60000$ с (рис. Б.7). Враховуючи, що один сигнал має бути в смузі пропускання фільтра, то встановимо частоту сигналу $f_1 = 2$ кГц (тобто frequency $w_1 = 2 * \pi * 2000$). Амплітуду сигналу візьмемо $A_1 = 5$. Другий сигнал має бути поза смугою пропускання, тому припустимо, що параметри сигналу такі: $f_2 = 15$ кГц, $A_2 = 3$.

На рис. Б.8 показано роботу фільтра. З рисунка видно, що після фільтрації залишився один гармонічний сигнал із параметрами (далі необхідно вказати який із сигналів залишився).

Пп. 9 і 10 виконати і описати аналогічно пп. 7 і 8.

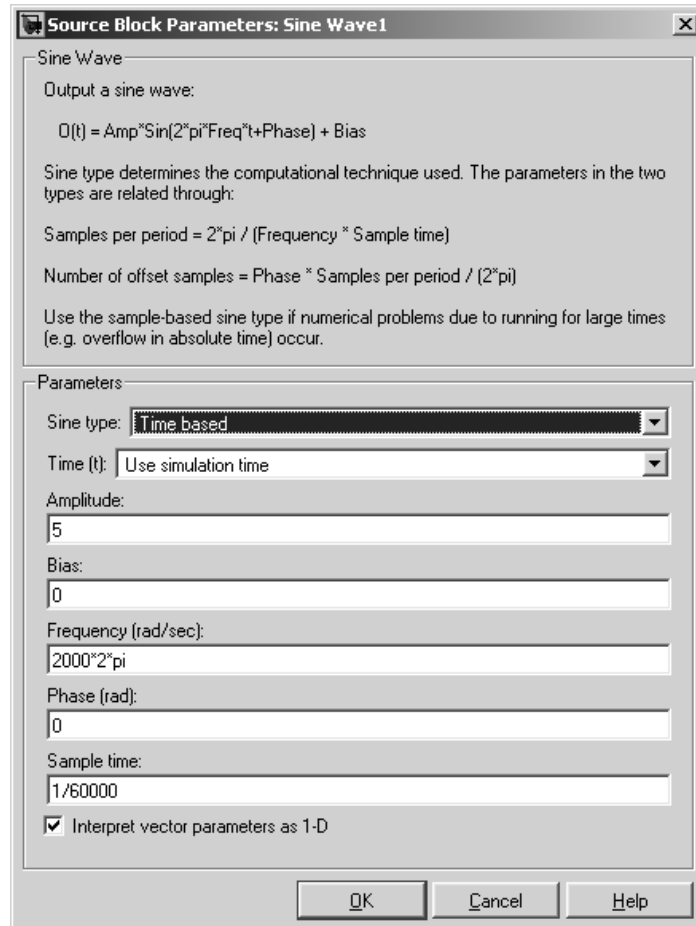


Рис. Б.7. Вікно параметрів дискретного гармонічного сигналу

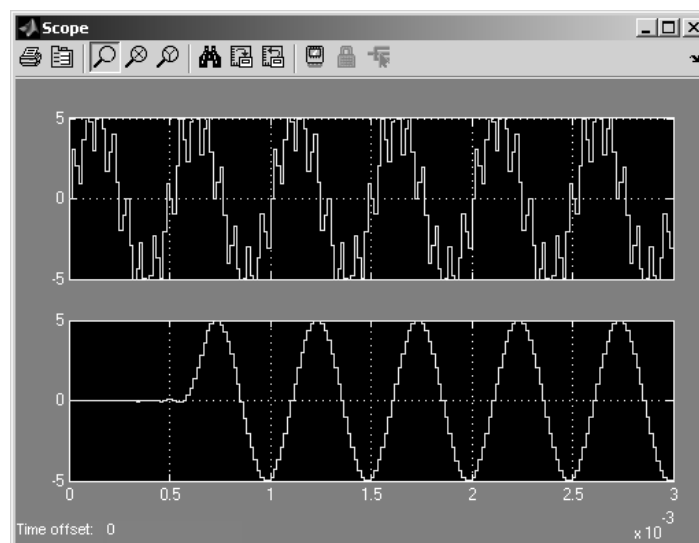


Рис. Б.8. Результати моделювання роботи СІХ-фільтра

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Спектральный анализ на ограниченном интервале времени. Оконные функции [Электронный ресурс]. URL: <http://www.dsplib.ru/content/win/win.html> (дата звернення: 06.05.13).
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – С.Пб. : Питер, 2002. – 608 с.
3. Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 Simulink 5/6 / В.П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2005. – 575 с.
4. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнов. – С.Пб. : БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
5. Айфичер Э.С. Цифровая обработка сигналов: практический подход / Э.С. Айфичер, Б.У. Джервис. – 2-е изд.; пер. с англ. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
6. Оппенгейм А.В. Цифровая обработка сигналов / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер. – М. : Связь, 1980. – 416 с.
7. Белоедов М.В. Методы проектирования цифровых фильтров: учеб. пособие / М.В. Белоедов. – Волгоград: Изд-во Волгогр. гос. ун-та, 2004. – 64 с.
8. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры / Р.В. Хемминг. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
9. Бушнев Д.В. Теоретические основы цифровой обработки сигналов: учеб. пособие / Д.В. Бушнев, В.А. Романов. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. – 116 с.
10. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие для вузов / Л.М. Гольденберг и др. – М. : Радио и связь, 1990. – 256 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. ВАГОВІ ФУНКЦІЇ.....	4
1.1. Призначення вагових функцій.....	4
1.2. Вимірювання фізичних величин у белах і децибелах.....	5
1.3. Спектральний аналіз на обмеженому інтервалі часу.	
Віконні функції.....	6
1.4. Деякі поширені вагові функції.....	12
1.5. Задання вагових вікон у пакеті MATLAB.....	18
1.6. Побудова графіків амплітудного спектра вікон.....	21
Контрольні запитання.....	22
2. ПРОЕКТУВАННЯ ФІЛЬТРІВ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ (СІХ-ФІЛЬТРІВ) МЕТОДОМ ЗВАЖУВАННЯ.....	24
2.1. Введення в цифрові фільтри.....	24
2.2. Етапи проектування цифрових фільтрів.....	26
2.3. Специфікація вимог.....	27
2.4. Обчислення коефіцієнтів методом зважування.....	30
2.5. Вплив скінченної розрядності на цифрові СІХ-фільтри.....	33
2.6. Реалізація методу зважування в пакеті MATLAB.....	37
2.7. Проектування фільтрів нижніх частот із скінченною імпульсною характеристикою.....	39
2.8. Проектування фільтра верхніх частот із скінченною імпульсною характеристикою.....	42
2.9. Проектування смугового фільтра із скінченною імпульсною характеристикою.....	44
2.10. Проектування режекторного фільтра із скінченною імпульсною характеристикою.....	46
Контрольні запитання.....	49
3. ПРОЕКТУВАННЯ ФІЛЬТРІВ ІЗ НЕСКІНЧЕННОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ (НІХ-ФІЛЬТРІВ).....	50
3.1. Основні характеристики рекурсивних фільтрів.....	50

3.2. Специфікація частотної характеристики НІХ-фільтра	53
3.3. Аналогові фільтри-прототипи	54
3.4. Перетворення смуги частот для аналогових фільтрів.....	60
3.5. Методи дискретизації аналогового фільтра	61
3.6. Функції пакета MATLAB для проектування цифрових фільтрів із нескінченною імпульсною характеристикою	70
3.7. Проектування фільтра нижніх частот із нескінченною імпульсною характеристикою	74
3.8. Проектування фільтра верхніх частот із нескінченною імпульсною характеристикою	82
3.9. Проектування смугового фільтра із нескінченною імпульсною характеристикою	83
3.10. Проектування режекторного фільтра із нескінченною імпульсною характеристикою.....	87
Контрольні запитання	89
 4. ПРОЕКТУВАННЯ ФІЛЬТРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТА FILTER DESIGN & ANALYSIS TOOL	90
4.1. Характеристика пакета FDATool.....	90
4.2. Задання специфікації і розрахунків фільтра	90
4.3. Перегляд характеристик фільтра.....	92
4.4. Експорт та імпорт опису фільтра	93
4.5. Характеристика пакета Simulink	96
4.6. Оглядач бібліотеки блоків.....	98
4.7. Створення моделі	98
4.8. Установка параметрів моделювання	101
4.9. Запуск процесу моделювання	102
Контрольні запитання	103
 Додаток А Розрахунково-графічне завдання	104
 Додаток Б Приклад виконання розрахунково-графічного завдання.....	108
 СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	116

Навчальне видання

ФІЛАТОВА Ганна Євгенівна

ПРОЕКТУВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

*Навчальний посібник
за курсом «Обробка сигналів і зображень»*

Відповідальний за випуск *Ф.А. Домнін*

Роботу до видання рекомендував проф. *В.Д. Дмитрієнко*

Редактор *О.В. Козюк*